사관학교 유형별, 년도별

03 수1 08 등차수열

01 등차수열의 일반항

02 일반항1 (관계식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 24

1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5=5,\ a_{15}=25$$

일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 5

2. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10}-a_7=6$$

일 때, a_4의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 13

3. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=-15,\ |a_3|-a_4=0$$

일 때, a_7의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 7

4. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3a_7 = 64, \ a_8 > 0$$

일 때, a_2의 값은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 3

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6, \ a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10}의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 16

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 7$, $a_2 + a_5 = 16$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

03 수1 08 등차수열

01 등차수열의 일반항

03 일반항2 (조건을 만족시키는 등차수열의 항)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 7

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8,\ 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

03 수1 08 등차수열

01 등차수열의 일반항

07 중항2 (등차중항을 이용한 간단한 계산)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 3

8. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = 20$일 때, a_2의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 26

9. 공차가2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 18

10. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

11. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_6=2(S_3-S_2)$일 때, S_{10}의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

01 일반항1 (관계식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 23

12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=12$$

일 때, $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 3

13. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=a_2+6$일 때, a_4의 값은?

① 18 ② 21 ③ 24

④ 27 ⑤ 30

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 2

14. 첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 3

15. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_2a_4=36$일 때, $\frac{a_7}{a_3}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3

④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 5

16. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4},\quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은?

① 16　② 20　③ 24
④ 28　⑤ 32

03 수1　09 등비수열

02 등비수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 26

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4 - S_3 = 2,\ S_6 - S_5 = 50$$

일 때, a_5의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 24

18. 첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 25

19. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=1,\ \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

01 시그마의 뜻1 (표현과 나열)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 12

20. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은?

① 88 ② 91 ③ 94

④ 97 ⑤ 100

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

02 시그마의 뜻2 (등차수열)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 15

21. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 20

22. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

23. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$　④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

03 수1　　10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

03 시그마의 뜻3 (등비수열)

[출처]　2018 모의_공공 평가원 고3 06월 15

24. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 4(a_2 - a_1),\ \sum_{k=1}^{6} a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① 3　② 4　③ 5

④ 6　⑤ 7

[출처]　2019 모의_공공 평가원 고3 06월 24

25. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2,\ \frac{a_5}{a_3} = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값을 구하시오.

[출처]　2019 모의_공공 평가원 고3 06월 28

26. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$

(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

04 시그마의 성질1 (기본성질)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 7

27. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3,\ \sum_{k=1}^{10} {a_k}^2 = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(2{a_k}^2 - a_k\right)$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 10

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 8,\ \sum_{k=1}^{5} b_k = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4)$의 값은?

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 18

29. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k) = 45,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k - b_k) = 3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 18

30. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

01 자연수의 거듭제곱의 합1 (기본)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 18

31. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a) = 250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

02 자연수의 거듭제곱의 합2 (식 변형)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 12

32. $\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값은?

① 91 ② 93 ③ 95

④ 97 ⑤ 99

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

01 소거형1 (시그마의 성질)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 7

33. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5

④ -3 ⑤ -1

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

01 항등식과 수열1 (합과 일반항의 관계)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

34. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 13

35. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.
다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1} = 2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$이므로 $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$이다.
>
> $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로
>
> $$a_n = S_n - S_{n-1} = -\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n} k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1)$$
>
> $$= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \boxed{(다)}$$
>
> $$= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

03 항등식과 수열3 (일반항 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 25

36. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 55$일 때, $\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3)$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

04 활용1 (일반항 구하기. 대수와 식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 17

37. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

$\sum_{k=1}^{9} \left\{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\right\}$의 값은?

① $\log 2 + \log 3$　② $2\log 2 + \log 3$

③ $\log 2 + 2\log 3$　④ $2\log 2 + 2\log 3$

⑤ $3\log 2 + 2\log 3$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 26

38. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 11

39. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$$

의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은?

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

07 활용4 (추론, 규칙적인 변화)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

40. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은?

① 150 ② 160 ③ 170
④ 180 ⑤ 190

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

08 활용5 (여러가지 추론)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 29

41. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

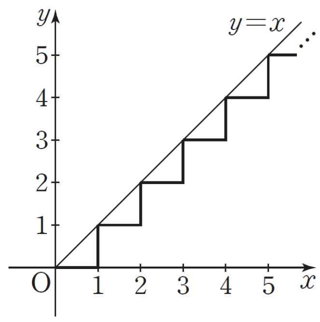
(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 29

42. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 $\mathrm{A_n}$을 다음과 같은 규칙으로 정한다.



(i) $\mathrm{A_0}$은 원점이다.

(ii) n이 자연수일 때, $\mathrm{A_n}$은 점 $\mathrm{A_{n-1}}$에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 $\mathrm{A_2}$와 $\mathrm{A_6}$의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A_n}$ 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

43. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

02 점화식2 (등비수열)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 21

44. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오.

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

09 점화식9 (이웃하는 항의 합 또는 곱으로 표현된 점화식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 11

45. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} = 2n$$

이고 $a_3 = 1$ 일 때, $a_2 + a_5$ 의 값은?

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$

④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 24

46. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = 3n - 1$$

을 만족시킨다. $a_3 = 4$일 때, $a_1 + a_5$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 10

47. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

10 점화식10 (주기수열)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 13

48. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 9

49. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고, $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 5

50. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

11 점화식11 (여러가지 점화식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 9

51. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+(-1)^n\times a_n=2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 21

52. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은?

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 14

53. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 21

54. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$
>
> (나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_7=2$일 때, a_{25}의 값은?

① 78 ② 80 ③ 82

④ 84 ⑤ 86

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

55. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 15

56. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

> (가) $a_5=5$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-6 & (a_n\ge 0)\\ -2a_n+3 & (a_n<0)\end{cases}$$
>
> 이다.

① 64 ② 68 ③ 72

④ 76 ⑤ 80

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

57. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

58. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

12 점화식12 (점화식 만들기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 16

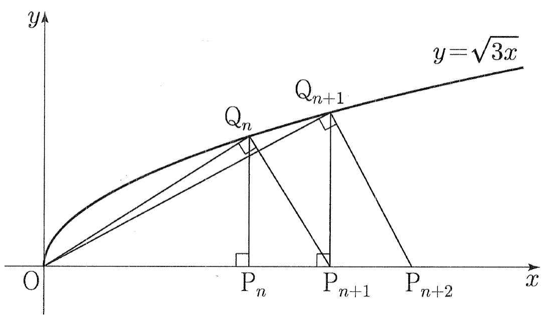
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월

59. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

(가) 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.

(나) 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은?

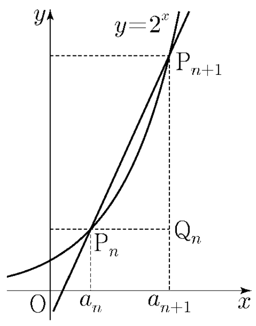
① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 16

60. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로 $2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로
> $$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$
> 이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$ 이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=\boxed{(나)}$ 이다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$ 이다.

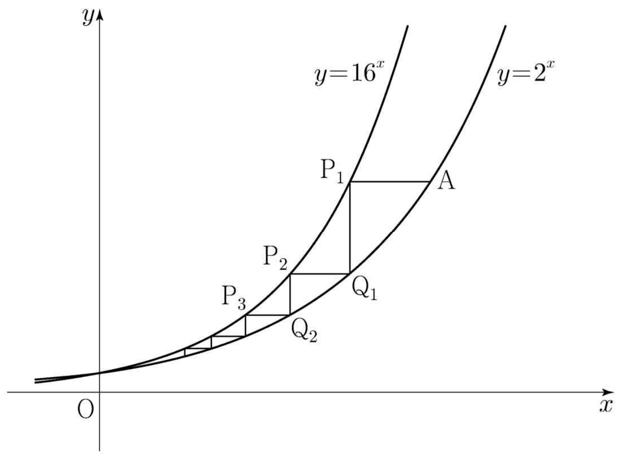
위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은?

① 118 ② 121 ③ 124
④ 127 ⑤ 130

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

61. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때,
$x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 48 ② 51 ③ 54
④ 57 ⑤ 60



사관학교 유형별, 년도별(빠른 정답)

문제검색하기 2022.12.15

1. [정답] 35
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] ③
5. [정답] ⑤

6. [정답] 21
7. [정답] ②
8. [정답] ⑤
9. [정답] 7
10. [정답] ②

11. [정답] ②
12. [정답] 36
13. [정답] ④
14. [정답] ④
15. [정답] ⑤

16. [정답] ③
17. [정답] 10
18. [정답] 63
19. [정답] 64
20. [정답] ②

21. [정답] ④
22. [정답] 25
23. [정답] ③
24. [정답] ③
25. [정답] 80

26. [정답] 162
27. [정답] ④
28. [정답] ⑤
29. [정답] 9
30. [정답] 12

31. [정답] 3
32. [정답] ⑤
33. [정답] ④
34. [정답] 58
35. [정답] ⑤

36. [정답] 160
37. [정답] ①
38. [정답] 9
39. [정답] ①
40. [정답] ⑤

41. [정답] 117
42. [정답] 8
43. [정답] ②
44. [정답] 678
45. [정답] ②

46. [정답] 8
47. [정답] ④
48. [정답] ①
49. [정답] ⑤
50. [정답] ①

51. [정답] ④
52. [정답] ④
53. [정답] ③
54. [정답] ③
55. [정답] ②

56. [정답] ③
57. [정답] ①
58. [정답] ②
59. [정답] ⑤
60. [정답] ⑤

61. [정답] ①

사관학교 유형별, 년도별(해설)

문제검색하기 2022.12.15

1) [정답] 35

[해설]

a_n은 등차수열 이므로

$a_5=a_1+4d=5$

$a_{15}=a_1+14d=25$ 이므로 두 식을 연립하면 $a_1=-3,\ d=2$ 이다.

따라서 $a_{20}=a_1+19d=35$

2) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=3d,\ 3d=6,\ d=2$

따라서

$a_4=a_1+3d=4+6=10$

3) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=-15$이고 $|a_3|-a_4=0$,

즉, $|a_3|=a_4$에서 $a_3>0$이면 $d=0$이므로 부합하지 않는다.

따라서 $a_3<0,\ a_4>0$이어야 하므로 $a_3+a_4=0$ …… ㉠

초항이 -15, 공차가 d인 등차수열이므로

$a_n=-15+(n-1)d$

에서 $a_3=2d-15,\ a_4=3d-15$

$\therefore a_3+a_4=5d-30=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore d=6$

따라서 $a_n=6n-21$이므로 $a_7=21$

4) [정답] ③

[해설]

공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 초항을 a_1이라 하면

$$a_3a_7=(a_1+(3-1)\cdot(-3))\times(a_1+(7-1)\cdot(-3))$$
$$=(a_1-6)(a_1-18)$$

즉, $(a_1-6)(a_1-18)=64$이므로 $a_1{}^2-24a_1+108=64$

$(a_1-2)(a_1-22)=0$

그런데, $a_8>0$이고, 공차가 -3이므로 $a_1=22$ ($\because a_1\neq 2$)

$\therefore a_2=a_1+(-3)=19$

5) [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=6$ ……㉠

$a_4+a_6=36$에서

$(a_1+3d)+(a_1+5d)=36$

$2a_1+8d=36$

$a_1+4d=18$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=2,\ d=4$

따라서

$a_{10}=2+9\times4=38$

6) [정답] 21

[해설]

$a_3+a_4=a_2+a_5$이므로 $a_4=16-7=9$

따라서 공차는 $d=a_4-a_3=2$

$\therefore a_{10}=a_3+7d=7+14=21$

7) [정답] ②

[해설]

$a_n=a+(n-1)d$라 하자 $a_1=a_3+8$은 $a=a+2d+8$이고 $d=-4$(공차)

$2a_4-3a_6=3$ 은 $2a+6d-3a-15d=3$이 된다.

$d=-4$이므로 $a=33$임을 알 수 있다. 즉 일반항 $a_n=33-4(n-1)=37-4n$

$\therefore\ 37-4n<0$ 즉 $\dfrac{37}{4}<n$

만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10

8) [정답] ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$a_3=a_1+2d$이므로 $a_1+a_3=2a_1+2d$

즉, $2a_1+2d=20$ $\quad\therefore a_1+d=10$

따라서 $a_2=a_1+d=10$

9) [정답] **7**

[해설]

등차수열의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 첫째항이 a이고 공차가 $d=2$를 대입하면

$$S_n=n(a+n-1) \quad\cdots\cdots ㉠$$

$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족하므로 ㉠에 $n=k$, $k+2$를 각각 대입하면

$$k(a+k-1)=-16 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$$(k+2)(a+k+1)=-12 \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉢−㉡에서 $2a+4k=2$ 즉, $a=1-2k$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $-k^2=-16$, $k^2=16$

$$\therefore k=4(\because\ k>0)$$

㉣에 대입하면 $a=-7$

따라서 일반항 $\{a_n\}$이 $a_n=a+(n-1)\cdot 2=2n+a-2$이고, $a=-7, k=4$이므로

$a_{2k}=a_8=-7+7\times 2=7$

10) [정답] ②

[해설]

$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$

에서

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=4$

이고, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2k+a_1+2(k+1)=4$

$a_1+2k+1=2$

$a_1=1-2k \cdots\cdots$ ㉠

이때 $S_k=-16$에서

$\dfrac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$

$k(a_1+k-1)=-16$

여기에 ㉠을 대입하면

$-k^2=-16$

k는 자연수이므로

$k=4$ 이고,

$a_1=1-2k=-7$

따라서

$a_{2k}=a_8$

$=-7+7\times 2$

$=7$

11) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 초항 $a_1=2$이므로

$$a_n=2+(n-1)d \quad\cdots\cdots ㉠$$

조건에서 $a_6=2(S_3-S_2)=2a_3$이므로

$$2+5d=2(2+2d)\ (\because\ ㉠)$$

즉, $2+5d=4+4d$이므로 $d=2$

등차수열의 합 $S_n=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$에서

$S_n=\dfrac{n(4+(n-1)\cdot 2)}{2}$이므로 $S_n=n(n+1)$

$$\therefore S_{10}=10\times 11=110$$

12) [정답] **36**

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=r^2+r$$

이므로

$r^2+r=12$

$(r+4)(r-3)=0$

$r>0$ 이므로 $r=3$

따라서

$\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}=r^2+r^3$

$=3^2+3^3=9+27=36$

13) [정답] ④

[해설]

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열이므로 $a_n=r^{n-1}$

$a_3=a_2+6$에서 $r^2=r+6$

$r^2-r-6=0,\ (r-3)(r+2)=0$

$r=3(\because\ r>0)$

따라서 $a_4=3^3=27$

14) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $\frac{a_3}{a_2}=r$에서 $r=2$

즉, 초항이 $\frac{1}{8}$이고, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=\frac{1}{8}\times 2^{n-1}$

따라서 $n=5$을 대입하면 $a_5=\frac{1}{8}\times 2^4=2$

15) [정답] ⑤

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_2a_4=36$에서
$a_1=2$이므로

$2r\times 2r^3=36$

즉, $r^4=9$

따라서 $\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=r^4=9$

16) [정답] ③

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로
공비를 $r(r>0)$라 하면
$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2$
$=\frac{1}{4}r+\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{2}$
$r^2+r-6=0,\ (r+3)(r-2)=0$
$r>0$이므로 $r=2$
따라서
$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6$
$=\frac{1}{4}\times 2^5+\frac{1}{4}\times 2^6$
$=24$

17) [정답] 10

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이므로

$S_4-S_3=a_4=2,$

$S_6-S_5=a_6=50$

$a_4,\ a_5,\ a_6$에서 등비중항에 의해

$\{a_5\}^2=a_4\times a_6=2\times 50=100$

$\therefore a_5=10$

18) [정답] 63

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$S_6-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6$
$=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5$
$=7r^2(1+r+r^2+r^3)$

$S_9-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$
$=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8$
$=7r^5(1+r+r^2+r^3)$

이때

$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=\frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=r^3$

이므로

$r^3=3$

따라서 $a_7 \equiv 7r^6=7\times(r^3)^2=7\times3^2=63$

19) [정답] 64

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_4=ar^3=r^3$ ($\because a_1=1$)

제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}$$

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}$$

그런데 조건에서 $\frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$이므로

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^3-1)}{r-1}}=2r^3-7,\ r^3+1=2r^3-7$$

$\therefore\ r^3=8$

따라서 $a_7=r^6$에서 $a_7=8^2=64$

20) [정답] ②

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$$

$$=a_1-a_{n+1}$$

그런데 조건에서 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n,\ a_1=1$이므로

$$a_{n+1}=n^2-n+1$$

$$\therefore a_{11}=91$$

21) [정답] ④

[해설]

$$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$

$$=-2n^2+52n$$

$$=-2(n-13)^2+2\times13^2$$

이므로 S_n 의 값은 $n=13$ 일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$ 의 값은 $m=11$ 일 때 최대가 된다.

22) [정답] 25

[해설]

$a_3+a_5=0$에서 $a_4=0$이다. 공차를 d라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 $-3d,\ -2d,\ d,\ 0,\ d,\ 2d,\ \cdots$

$d\le0$이면 $2(-3d-2d-d)=-12d=30$

만족하는 정수 d가 없다. 따라서 $d>0$이다.

그러면 $2(d+2d)=6d=30,\ d=5$

$\therefore a_9=a_4+5d=25$

23) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건

(가)에서

$a_5\times a_7<0$

이므로

$a_5<0,\ a_7>0$

즉, $n\le5$일 때 $a_n<0$이고, $n\ge7$일 때

$a_n>0$이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$$

이므로

$|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$

$a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1+18)+(a_1+24)+(a_1+30)$

$=6-(a_1+3)-(a_1+9)+|a_1+15|$

$|a_1+15|=5a_1+78$ ……㉠

㉠에서 $a_1+15\ge0$이면

$a_1+15=5a_1+78$

$4a_1=-63$

$a_1=-\frac{63}{4}<-15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1+15<0$이므로 ㉠에서

$-a_1-15=5a_1+78$

$6a_1=-93$

$a_1=-\frac{31}{2}$

따라서

$a_{10}=a_1+9\times3$

$=-\frac{31}{2}+27$

$=\frac{23}{2}$

24) [정답] ③

[해설]

a_n이 등비수열이므로 $a_3=4(a_2-a_1)$에서

$ar^2=4(ar-a)$

$r^2=4r-4$

$(r-2)^2=0$

$\therefore r=2$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\frac{a(1-r^6)}{1-r}=15$ 에서 $a=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$

따라서

$a_1+a_3+a_5$

$=a+ar^2+ar^4$

$=a(1+r^2+r^4)$

$=\frac{5}{21}(1+2^2+2^4)$

$=5$

25) [정답] **80**

[해설]

$\{a_n\}$이 초항 $a_1=2$, 공비 r이 양수인 등비수열이므로

$\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1r^4}{a_1r^2}=r^2=9$

$\therefore\ r=3\ (\because\ r>0)$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{4}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4$

$=\frac{a(r^4-1)}{r-1}$

$=\frac{2\times(3^4-1)}{3-1}$ ($\because$ ㉠)

$=80$

26) [정답] **162**

[해설]

첫째항이 2이고 공비를 r (단, r은 정수)이라 하면

$a_n=2r^{n-1}$ …… ㉠

㉠에서 $a_2=2r$, $a_3=2r^2$이므로 조건 (가)에 대입하면

$4<2r+2r^2\le12$, $2<r+r^2\le6$

따라서 $0<r^2+r-2$, $r^2+r-6\le0$를 풀면

$0<(r+2)(r-1)$에서 $r<-2$ 또는 $r>1$
…… ㉡

$(r+3)(r-2)\le0$에서 $-3\le r\le2$
…… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $-3\le r<-2$ 또는 $1<r\le2$

그런데 공비 r이 정수이므로 $r=-3$ 또는 $r=2$

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^{m}a_k=122$이므로

(i) $r=-3$인 경우

$\sum_{k=1}^{m}2(-3)^{k-1}=122$

$\frac{2\{(-3)^m-1\}}{(-3-1)}=122$, $\{(-3)^m-1\}=-244$

$(-3)^m=-243$ $\quad\therefore m=5$

따라서 ㉠에서 $a_m=2(-3)^{m-1}$이므로 $a_5=2(-3)^4$

$\therefore a_5=162$

(ii) $r=2$인 경우

$\sum_{k=1}^{m}2(2)^{k-1}=122$

$\frac{2(2^m-1)}{2-1}=122$, $2^m-1=61$, $2^m=62$

그런데 m은 자연수이므로 조건에 모순이 된다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 만족하는 $m=5$이므로 $a_m=a_5=162$

27) [정답] ④

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k^2-a_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k$ 이고

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2=7$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=3$ 이므로

(준식) = $14-3=11$

28) [정답] ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}a_k=8$, $\sum_{k=1}^{5}b_k=9$이므로 $\sum$의 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$

$=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}4$

$=2\times8-9+4\times5$

$=27$

29) [정답] 9

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=45$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$

즉, $\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}b_k-10\times\frac{1}{2}=14-5=9$

30) [정답] 12

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{a_8}{2}=6$

따라서 $a_8=12$

31) [정답] 3

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=4\sum_{k=1}^{10}k+10a$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+10a$

$=220+10a$

즉, $220+10a=250$이므로

$10a=30$

따라서

$a=3$

32) [정답] ⑤

[해설]

식을 변형하면 $\sum_{k=1}^{9}k^2+2k+1-\sum_{k=1}^{9}(k-1)^2-(10-1)^2$과 같다.

$\sum_{k=1}^{9}(k^2+2k+1-k^2+2k-1)-81=\sum_{k=1}^{9}4k-81$

$=4\times\frac{9\times10}{2}-81=180-81=99$

33) [정답] ④

[해설]

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}$이므로 $n=12$를 대입하면

$\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$

즉, $a_{13}=-3$

34) [정답] 58

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$을 만족하므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$

$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=4n+5$

즉, $\frac{4n-3}{a_n}=4n+5$이므로

$a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$ (단, $n\geq 2$)

$n=5$를 대입하면 $a_5=\frac{17}{25}$

$n=7$를 대입하면 $a_5=\frac{25}{33}$

$n=9$를 대입하면 $a_5=\frac{33}{41}$

$\therefore a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$

따라서 $p=41$, $q=17$이므로 $p+q=58$

35) [정답] ⑤

[해설]

(i) $n=1$; $S_1=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$, $\therefore\frac{1}{a_1}=2$

(ii) $n\geq 2$; $\frac{S_n}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=-\frac{n}{(n+1)!}$

$S_n=-\frac{n}{n+1}$

$n=2$이면 $a_2=S_2-a_1=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}$

$\therefore\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$

$n\geq 3$이면

$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{a_n}=-n(n+1)$

$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$

$=\frac{8}{7}+2+6-\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$=\frac{64}{7}-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$

$\therefore f(n)=n$, $g(n)=\frac{1}{n(n+1)}$, $h(k)=k^2$

$f(5)\times g(3)\times h(6)=5\times\frac{1}{12}\times 36=15$

36) [정답] 160

[해설]

$\sum_{k=1}^{5}a_k=55$에서 공차를 d라 하면

$\frac{5\{2\times 3+4\times d\}}{2}=55$

$\therefore d=4$

따라서 $a_n=4n-1$

$\sum_{k=1}^{5}k(4k-1-3)$

$=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k)$

$=4\times\frac{5\times 6\times 11}{6}-4\times\frac{5\times 6}{2}$

$=160$

37) [정답] ①

[해설]

36 의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$ 은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$ 은 짝수이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$$

$$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 4+\log 6-\log 9$$
$$+\log 12+\log 18-\log 36$$

$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$

$=\log 6$

$=\log 2+\log 3$

38) [정답] 9

[해설]

이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

즉, $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$ 또는 $\alpha_n=n-1$, $\beta_n=n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$

$=\sqrt{81}-0=9$

39) [정답] ①

[해설]

$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$에서 두 근을

$x=\alpha$, $x=\beta$라고 하면 $a_n=\alpha+\beta=\dfrac{n+5}{(n+1)(n+5)}=\dfrac{1}{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}(k+1)$$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\dfrac{10(1+10)}{2}+10$

$=65$

40) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$이고 $f(x+1)=f(x)$를 만족하므로

(ⅰ) $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 즉 $x=$(자연수)일 때, $f(x)=1$

(ⅱ) $x\neq$(자연수)일 때, $f(x)=3$

또, $\sqrt{k}$가 자연수가 되려면 k는 완전제곱수이므로

$k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=1$

$k\neq1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때, $f(\sqrt{k})=3$

$$\therefore\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$

$=\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\{k\times f(\sqrt{k})\}$

$=\dfrac{1}{3}(1\times1+4\times1+9\times1+16\times1)$

$+\dfrac{1}{3}(2\times3+3\times3+5\times3+\cdots+20\times3)$

$=10+(2+3+5+6+\cdots+20)$

←( )안에 1, 4, 9, 16이 빠짐

$=10+(1+2+3+\cdots+20)-(1+4+9+16)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{20}k-20$

$=\dfrac{20\times21}{2}-20$

$=190$

41) [정답] 117

[해설]

조건 (가)와 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$이므로

$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$ …… ㉠

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r (r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0$, $b_2<0$, $b_3>0$, $b_4<0$, $b_5>0$이므로 ㉠에서

$-2(b_2+b_4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20$ …… ㉡

$b_1r(1+r^2)=-20$

이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 한다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$

이다. ㉡에서

$r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\frac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10$, $r=-1$ 또는 $b_1=2$, $r=-2$

(i) $b_1=10$, $r=-1$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=10$이므로

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n+\sum_{n=1}^{5}b_n=27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n+10=27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=17$에서

$a_3=\frac{17}{5}$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 정수이다.

따라서 $b_1=10$, $r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_1=2$, $r=-2$일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$

조건(가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n+22=27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=5$에서

$a_3=1$

또, $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=\frac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|}=62$

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+\sum_{n=1}^{5}|b_n|=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+62=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19$ …… ㉢

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$a_3=1$

이므로 $a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$

이다. 이때,

$a_1=1-2d$

$a_2=1-d$

$a_4=1+d$

$a_5=1+2d$

이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=19$

$d=-3$

따라서 $a_1=1-2\times(-3)=7$

(i), (ii)에서

$a_1=7$, $d=-3$, $b_1=2$, $r=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항a_n

$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n = 2\times(-2)^{n-1}$

따라서

$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$

42) [정답] 8

[해설]

점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25} = \frac{1}{25}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2} - n\right\}$$
$$= \frac{n^2}{25} = \left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n 이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$ 이 짝수이면 $\frac{n}{5}$ 도 짝수이므로

$\frac{n}{5} = 2m$ (m은 자연수)

에서 $n = 10m$

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$,

즉 $n=20$ 일 때이므로 점 A_{20} 이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$ (k는 자연수)일 때 점 P의 x 좌표는 k 이고, 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2 = 4^2 = 16$ 이므로 점 A_{20} 의 x 좌표는 8 이다. 즉, $a=8$

43) [정답] ②

[해설]

$a_1 = -45 < 0$이고 $d > 0$이므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$a_m < 0,\ a_{m+3} > 0$$

즉, $-a_m = a_{m+3}$에서 $a_m + a_{m+3} = 0$

따라서

$$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$$
$$-90+(2m+1)=0$$
$$(2m+1)d=90 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90 = 2\times3^2\times5$이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2} > -100$$
$$n\{-90+(n-1)d\} > -200 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은 $18+30=48$

44) [정답] 678

[해설]

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n| = 2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k| = \sum_{k=1}^{9}2^k = \frac{2(2^9-1)}{2-1} = 2^{10}-2,$$

$|a_{10}| = 2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = -14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1 = -2,\ a_2 = -4$

$$\sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{k=3}^{9} 2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10}-8,$$

$a_{10} = -1024$

이어야 한다.

따라서

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = (-2)+2^3+2^5+2^7+2^9$$
$$= 678$$

45) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $a_n a_{n+1} = 2n$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 대입하면

$n=1$일 때, $a_1a_2 = 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$n=2$일 때, $a_2a_3 = 4$ $\cdots\cdots$ ㉡

$n=3$일 때, $a_3a_4 = 6$ $\cdots\cdots$ ㉢

$n=4$일 때, $a_4a_5=8$ …… ㉣

$a_3=1$이므로 ㉡에서 $a_2=4$, ㉢에서 $a_4=6$

㉠, ㉣에 대입하면 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_5=\frac{4}{3}$

$$\therefore a_2+a_5=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

46) [정답] 8

[해설]

$a_1+a_2=2$이고, $a_2+a_3=5$, $a_3=4$이므로 $a_2=1, a_1=1$이다.

또한, $a_3+a_4=8$, $a_4+a_5=11$이므로 $a_4=4, a_5=7$이다.

$a_1+a_5=8$이다.

47) [정답] ④

[해설]

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서

$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$

이때, $a_1=12$이므로

$a_2=-a_1+1=-11$

$a_3=-a_2-2=9$

$a_4=-a_3+3=-6$

$a_5=-a_4-4=2$

$a_6=-a_5+5=3$

$a_7=-a_6-6=-9$

$a_8=-a_7+7=16$

따라서, $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

48) [정답] ①

[해설]

$a_1=2$이므로

$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-3\times2}=-\frac{1}{2}$

$a_3=1+a_2=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-3\times\frac{1}{2}}=1$

$a_5=1+a_4=1+1=2$

이때 $a_1=a_5$이고 1, 5가 모두 홀수이므로

$a_2=a_6$, $a_3=a_7$, $a_4=a_8$, $\cdots$, 즉 $a_n=a_{n+4}$ (n은 자연수)가 성립한다.

따라서

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=\cdots=a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{40}a_n=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times10$$

$=\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+1\right\}\times10$

$=3\times10=30$

49) [정답] ⑤

[해설]

$a_2=\frac{1}{a_1}$,

$a_3=8a_2=\frac{8}{a_1}$,

$a_4=\frac{1}{a_3}=\frac{a_1}{8}$,

$a_5=8a_4=a_1$,

$\vdots$

따라서 $a_1=a_5=a_9=\cdots$, $a_2=a_6=a_{10}=\cdots$,

$a_3=a_7=a_{11}=\cdots$

$a_4=a_8=a_{12}=\cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3, a_4가 반복되는 형태의 수열이다.

조건에서 $a_{12}=\frac{1}{2}$이므로 $a_{12}=a_4=\frac{a_1}{8}=\frac{1}{2}$을 만족한다.

즉, $a_1=4$, $a_4=\frac{1}{2}$이므로 $a_1+a_4=\frac{9}{2}$

50) [정답] ①

[해설]

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$\sum_{k=1}^{8} a_k=2\times(1+2+4+8)$

$=2\times15$

$=30$

51) [정답] ④

[해설]

$a_1=1$이므로 $a_{n+1}+(-1)^n\times a_n=2^n$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 대입하면

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_2-a_1=2$

$\therefore\ a_2=3$

(ⅱ) $n=2$일 때, $a_3+a_2=4$

$\therefore\ a_3=1$

(ⅲ) $n=3$일 때, $a_4-a_3=8$

$\therefore\ a_4=9$

(ⅳ) $n=4$일 때, $a_5+a_4=16$

$\therefore\ a_5=7$

52) [정답] ④

[해설]

$a_{20}=a_{10}-1$에서 $a_{20}=1$이므로

$a_{10}=2$

또, $a_{10}=a_5-1$에서

$a_5=3$

$a_5=2a_2+1$에서

$a_2=1$

$a_2=a_1-1$에서

$a_1=2$

한편, $a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-1)+(2a_n+1)=3a_n$이므로

$a_2+a_3=3a_1$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3a_2+3a_3=3^2a_1$

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}=3a_4+3a_5+\cdots+3a_7=3^3a_1$

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}=3a_8+3a_9+\cdots+3a_{15}=3^4a_1$

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}=3a_{16}+3a_{17}+\cdots+3a_{31}=3^5a_1$

따라서

$\sum_{n=1}^{63} a_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)$

$+(a_8+\cdots+a_{15})+(a_{16}+\cdots+a_{31})$

$+(a_{32}+\cdots+a_{63})$

$=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\dfrac{3^6-1}{3-1}=728$

53) [정답] ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{3n-1}=2a_n+1,\ a_{3n}=-a_n+2,\ a_{3n+1}=a_n+1$

위 식을 변변히 더하면

$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n+4$

$n=4$를 대입하면 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4$

그런데, $a_{3n+1}=a_n+1$에서 $a_4=a_1+1=2$

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=4+4=8$

54) [정답] ③

[해설]

조건 (가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$에서

$n=1$을 대입하면 $a_2=a_2\times a_1+1$이므로

$a_2\times a_1=a_2-1$ …… ㉠

$n=2$을 대입하면 $a_4=(a_2)^2+1$ …… ㉡

$n=4$를 대입하면

$$a_8=a_2\times a_4+1$$
$$=a_2\times\{(a_2)^2+1\}+1\ (\because ㉡)$$
$$=(a_2)^3+a_2+1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

조건 (나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$에서

$n=1$을 대입하면

$$a_3=a_2\times a_1-2$$
$$=a_2-3\ (\because ㉠) \quad \cdots\cdots ㉣$$

$n=3$을 대입하면

$$a_7=a_2\times a_3-2$$
$$=a_2\times(a_2-3)-2\ (\because ㉣)$$
$$=(a_2)^2-3a_2-2 \quad \cdots\cdots ㉤$$

$n=7$을 대입하면

$$a_{15}=a_2\times a_7-2$$
$$=a_2\times\{(a_2)^2-3a_2-2\}-2\ (\because ㉤)$$
$$=(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2 \quad \cdots\cdots ㉥$$

이때, $a_8-a_{15}=63$이므로 ㉢, ㉥에 의해

$$\{(a_2)^3+a_2+1\}-(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2=63$$

즉, $\{a_2\}^2+\{a_2\}-20=0$이므로

$$(a_2-4)(a_2+5)=0$$

$$\therefore a_2=-5 \text{ 또는 } a_2=4$$

(i) $a_2=-5$일 때, ㉠에서 $-5a_1=-6$

$$\therefore a_1=\frac{6}{5}$$

그런데, 조건에서 $0<a_1<1$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=4$일 때, ㉠에서 $4a_1=3$

$$\therefore a_1=\frac{3}{4}$$

그런데, 조건에서 $0<a_1<1$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=4$

$$a_{25}=a_2\times a_{12}-2$$
$$=4a_{12}-2\ (\because a_2=4)$$
$$=4(a_2\times a_6+1)-2$$
$$=16a_6+2$$
$$=16(4a_3+1)+2$$
$$=64a_3+18$$
$$=82\ (\because ㉣에서\ a_3=1)$$

55) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$에 $n=3$을 대입하면

$$a_5=\begin{cases}2a_3+a_4 & (a_4\ge 2)\\ a_3+a_4 & (a_4<2)\end{cases}$$

그런데 $a_3=2$이므로

$$a_5=\begin{cases}a_4+4 & (a_4\ge 2)\\ a_4+2 & (a_4<2)\end{cases}$$

따라서 위 식에서 어떤 경우에도 $a_4\le a_5$이므로

$$a_6=2a_4+a_5$$

(i) $a_4\ge 2$인 경우

$$a_6=2a_4+(a_4+4)=3a_4+4=19$$
$$\therefore a_4=5$$

준 식에 $n=2$를 대입하면

$$a_4=\begin{cases}2a_2+2 & (a_2\le 2)\\ a_2+2 & (a_2>2)\end{cases}\ (\because a_3=2)$$

㉠ $2a_2+2=5$일 때, $a_2=\frac{3}{2}$

$$a_3=\begin{cases}2a_1+a_2=2 & (a_1\le a_2)\\ a_1+a_2=2 & (a_1>a_2)\end{cases}$$

즉, $2a_1+\frac{3}{2}=2$ (단, $a_1\le a_2$) 또는

$a_1+\frac{3}{2}=2$ (단, $a_1>a_2$)를 만족하는 a_1은

$$a_1=\frac{1}{4}$$

㉡ $a_2+2=5$일 때, $a_2=3$

$$a_3=\begin{cases}2a_1+a_2=2 & (a_1\le a_2)\\ a_1+a_2=2 & (a_1>a_2)\end{cases}$$

즉, $2a_1+3=2$ (단, $a_1\le a_2$) 또는

$a_1+3=2$ (단, $a_1>a_2$)를 만족하는 a_1은

$$a_1=-\frac{1}{2}$$

(ii) $a_4<2$인 경우

$$a_6=2a_4+(a_4+2)=3a_4+2=19$$

$a_4=\frac{17}{3}$인데 $a_4<2$이므로 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 만족하는 a_1은 $a_1=\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$이므로 모든

a값의 합은 $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

56) [정답] ③

[해설]

주어진 조건에 의하면 $n\ge 5$일 때 a_n은 한가지 이다

따라서 a_4, a_3, a_2, a_1의 값만 확인한다.

$a_n<0$이면 $a_{n+1}=-2a_n+3>0$이므로

수열 $\{a_n\}$의 값이 연속하여 음수인 경우는 없다.

따라서 최댓값은 $a_{n+1}=a_n-6$일 때

즉 $a_4=11$, $a_3=17$, $a_2=23$, $a_1=29$ 일 때이다.

최솟값은 (나)의 관계식이 번갈아 나오는 경우

즉 $a_4=-1$, $a_3=5$, $a_2=-1$, $a_1=5$일 때이다.

$\therefore M-m=(11+17+23+29)-(-1+5-1+5)$

$=80-8=72$

57) [정답] ①

[해설]

먼저 a_5의 값을 구해보자.

(ⅰ) $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$일 때, $a_6=-2a_5-2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5-2=0$

즉, $a_5=-2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$일 때, $a_6=2a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$3a_5=0$ 즉, $a_5=0$

(ⅲ) $\frac{1}{2}<a_5\le 1$일 때, $a_6=-2a_5+2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-a_5+2=0$ 즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a_5=0$

이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\le a_{n+1}\le 1$일 때,

$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$

(ⅰ) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고,

$a_2=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며,

이것은 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$$

58) [정답] ②

[해설]

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$

$a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$

(m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다.

$a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5 = a_4 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$

$a_5 < 0$이므로

$a_6 = a_5 + \frac{1}{k+1} = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6 = 0$이므로 $n = 5m-4$

(m은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다. 즉,

$a_{22} \neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6 > 0$이므로

$a_7 = a_6 - \frac{1}{k} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$

$a_7 < 0$이므로

$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8 = 0$이고 이때 $a_{22} = 0$이다.

$k=4$이면 $a_{10} = 0$이고 이때 $a_{22} \neq 0$이다.

$5 \leq k \leq 9$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22} = 0$이다.

$k \geq 11$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

59) [정답] ⑤

[해설]

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$에서

$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$\therefore \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \boxed{3}$

$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로 $a_{n+1} = a_n + 3$

즉, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n = 1+3(n-1) = 3n-2$ …… ㉠

$A_n = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}_{n+1}} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$= \frac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$

$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{3(3n-2)}$ ($\because$ ㉠)

$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{9n-6}$

즉, $p=3$, $f(n) = 3n+1$이므로 $p+f(8) = 3+25 = 28$

60) [정답] ⑤

[해설]

$\frac{A_3}{A_1} = 16$ 이므로 $\frac{2^{a_3+d} - 2^{a_3}}{2^{1+d} - 2} = \frac{2^{1+3d} - 2^{1+2d}}{2^{1+d} - 2^1} = 16$ 에서 $d=2$

$2^x = kx+1$ 에서 $2^2 = 2k+1$, $k = \frac{3}{2}$

$a_1 = 1$ 이고, $d = 2$ 이므로 $a_n = 2n-1$ 이므로 $f(2) = 3$

$A_n = \frac{1}{2} \times 2 \times (2^{2n+1} - 2^{2n-1}) = 3 \times 2^{2n-1}$ 이므로 $g(4) = 3 \times 2^7$

$p + \frac{g(4)}{f(2)} = 2 + \frac{3 \times 2^7}{3} = 130$

61) [정답] ①

[해설]

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64} = 16^{x_1}$에서

$2^{64} = 2^{4x_1}$

$4x_1 = 64$에서

$x_1 = 16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 x_n으로 서로

같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비 가 $\frac{1}{4}$인

등비수열이므로

$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5 \geq \frac{1}{k}$이고 $x_6 < \frac{1}{k}$

이어야 한다.

$x_5 \geq \frac{1}{k}$에서 $2^{-4} \geq \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$에서 $k \geq 16 \cdots$㉠

$x_6 < \frac{1}{k}$에서 $2^{-6} < \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64} < \frac{1}{k}$에서 $k < 64 \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $16 \leq k < 64$이므로 자연수 k의 개수는 $64 - 16 = 48$이다.