04 수2 01 함수의 극한

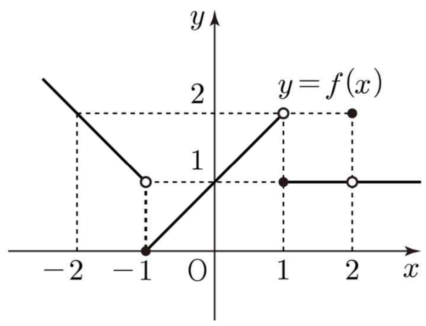
01 좌극한과 우극한

01 좌극한과 우극한1 (그래프 조건)

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 단국대학교사범대학부속고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 2

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)$의 값은?

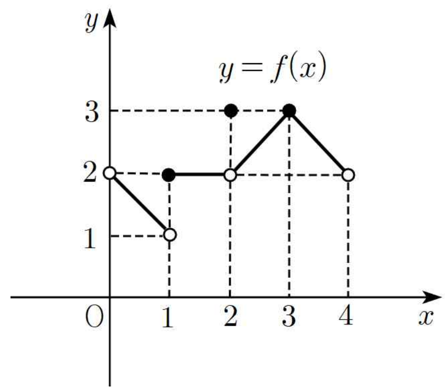


① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 반포고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 3

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,

$f(2)-\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to3+}f(x)$의 값은?

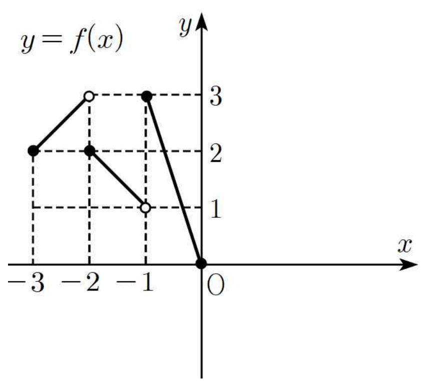


① −1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 서문여자고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 5

3. 정의역이 $\{x|-3\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[-3, 0]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. 이때,

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)$의 값은?



① −3 ② −2 ③ −1
④ 0 ⑤ 1

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

06 부정형5 (음의 무한대)

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 중산고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 17

4. $\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} - \lim_{x \to -\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-1}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 반포고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 4

5. 극한값 $\lim_{x \to -\infty}\frac{x-1}{\sqrt{4x^2+x}-3x}$의 값은?

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

07 부정형6 (함수의 극한의 대소 관계)

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 영동고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 4

6. $|x|<1$일 때, 부등식 $\frac{|x|}{x-1} \le f(x) \le \frac{|x|}{x+1}$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 단국대학교사범대학부속고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 5

7. 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^2 \le xf(x)+2 \le 3(x^2+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty}\frac{|3\cos\pi x|+f(x)}{2x}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 중산고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 4

8. 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$2x^3-x^2 \le x^2 f(x) < 2x^3+x^2$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x+1}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 강남구 영동고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 13

9. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)}=3,\ \lim_{x \to \infty} \frac{(x-7)(x^2+11x-3)}{f(x)}=1$$

을 만족시킨다. $f(2) \le 5$일 때, $f'(2)$의 최댓값은?

① 1　② 5　③ 8
④ 11　⑤ 13

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 서문여자고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 17

10. 다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3}=9$를

만족시킬 때, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 세화고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 17

11. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^5} = 2$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 3$

(다) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)f(x)}{xf'(x)} = 1$

$f(2)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

[출처] 2021 내신_학교 서울특별시 서초구 세화고등학교 고2 2학기 1차(중간) 내신 9

12. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)^3 f\left(\frac{1}{x-1}\right) - 2}{x^2 - x} = 3$

(나) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2+x-6} = \frac{26}{5}$

$f(1)$의 값은?

① -11 ② -13 ③ -15
④ -17 ⑤ -19

내신유형별(빠른 정답)

작업공간 2023.04.30

1. [정답] ③
2. [정답] ④
3. [정답] ①
4. [정답] 6
5. [정답] ①

6. [정답] ②
7. [정답] ①
8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] -10

11. [정답] ②
12. [정답] ②

내신유형별(해설)

작업공간 2023.04.30

1) [정답] ③

[해설]
그림에서

$$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$$
$$=0+2+1=3$$

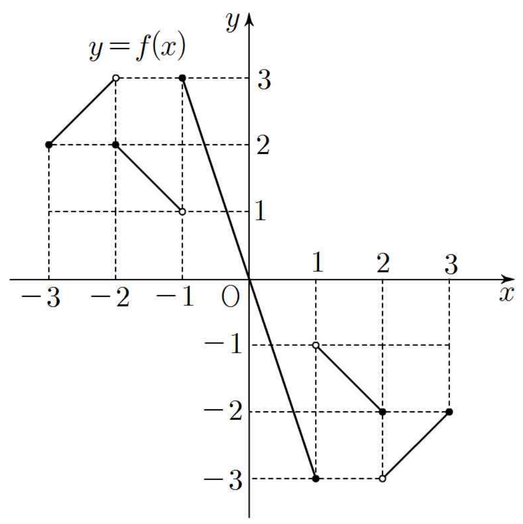
2) [정답] ④

[해설]
$f(2)=3,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to 3+} f(x)=3$이므로

$$f(2)-\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 3+} f(x)=3-1+3=5$$

3) [정답] ①

[해설]
$f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)$의 그래프를 확장하면 아래와 같다.



위 그래프에서

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=-1,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=-2$$

이므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=(-1)+(-2)=-3$$

4) [정답] 6

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-(1-x^2)}\times(1+\sqrt{1-x^2})$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x^2})=2$$

이고, $x=-t$라 하면

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2+2}-1}=-4$$

이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}-\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-1}$$
$$=2-(-4)=6$$

5) [정답] ①

[해설]
$-x=t$라 하면 $x\to -\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{\sqrt{4x^2+x}-3x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{\sqrt{4t^2-t}+3t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{t}}{\sqrt{4-\frac{1}{t}}+3}$$
$$=\frac{-1}{2+3}$$
$$=-\frac{1}{5}$$

6) [정답] ②

[해설]
$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x-1}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}=0$이고, 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x-1}\le\lim_{x\to 0} f(x)\le\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}$$
$$0\le\lim_{x\to 0} f(x)\le 0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

7) [정답] ①

[해설]
주어진 부등식에서

$$\frac{3x^2-2}{x^2}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3(x^2+1)-2}{x^2}$$

극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

$|3\cos\pi x|\le 3$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{|3\cos\pi x|}{2x}=0$

$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{|3\cos\pi x|+f(x)}{2x}=\frac{3}{2}$

8) [정답] ①

[해설]

$2x^3-x^2 \le x^2 f(x) < 2x^3+x^2$

각 변을 $x^2(2x+1)$로 나누면

$\frac{2x^3-x^2}{x^2(2x+1)} \le \frac{f(x)}{2x+1} < \frac{2x^3+x^2}{x^2(2x+1)}$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2(2x+1)} \le \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x+1} < \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^2(2x+1)}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^2(2x+1)}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x+1}=1$

9) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 다항함수이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-7)(x^2+11x-3)}{f(x)}=1$

이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $f(1)=0$, $f'(1)=3$이다. 이로부터

$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+3(x-1)$

라 둘 수 있다.

$f(2)=1+a+3=a+4 \le 5$, $\quad a \le 1$

$f'(x)=3(x-1)^2+2a(x-1)+3$에서

$f'(2)=3+2a+3=2a+6 \le 8$

따라서 $f'(2)$의 최댓값은 8이다.

10) [정답] -10

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항이 2인 이차식이다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=9$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

$f(3)=0$

따라서 $f(x)=2(x-3)(x+k)$이라 하면

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(x+k)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}2(x+k)$

$=6+2k=9$

에서 $\quad k=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$=-10$

11) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항이 5차이고, 5차항의 계수는 2이다.

조건 (나)에서 $x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이므로 $\quad f(1)=0$

(ⅰ) $f(x)=(x-1)g_1(x)$ (단, $g_1(1)\neq0$)이라 하면

$f'(x)=g_1(x)+(x-1)g_1'(x)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g_1(x)+(x-1)g_1'(x)\}}{(x-1)g_1(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{g_1(x)+xg_1'(x)}{g_1(x)}=1$

$\therefore g_1(1)=0$

(ⅱ) $f(x)=(x-1)^2g_2(x)$ (단, $g_2(1)\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2(x-1)g_2(x)+(x-1)^2g_2'(x)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2\{2g_2(x)+(x-1)g_2'(x)\}}{(x-1)^2g_2(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2g_2(x)+(x-1)g_2'(x)}{g_2(x)}=2$

$\therefore g_2(1)=0$

(ⅲ) $f(x)=(x-1)^3g_3(x)$ (단, $g_3(1)\neq0$)이라 하면

$f'(x)=3(x-1)^2g_3(x)+(x-1)^3g_3'(x)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3\{3g_3(x)+(x-1)g_3'(x)\}}{(x-1)^3g_3(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3g_3(x)+(x-1)g_3'(x)}{g_3(x)}=3$

이상에서 $f(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

조건 (다)에서 $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x-1)^3(2x+a)$ (단, $a\neq0$)

이라 하면

$$f'(x)=(x-1)^3(2x+a)+3x(x-1)^2(2x+a)+2x(x-1)^3$$

$f'(x)=-a$ 이므로 조건 (다)의 식에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)x(x-1)^3(2x+a)}{xf'(x)}=\frac{-2a}{-a}=2$$

따라서 조건을 만족하지 못하므로 $a=0$

따라서 $f(x)=2x^2(x-1)^3$ 이므로 $f(2)=8$

12) [정답] ②

[해설]

$\frac{1}{x-1}=t$라 하면 $x\to 1+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^3f\left(\frac{1}{x-1}\right)-2}{x^2-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-2}{\frac{t+1}{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-2t^3}{t(t+1)}$$

$$=3$$

$f(x)=2x^3+3x^2+ax+b$로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to 2$이면 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(2)=0$에서

$$f(2)=16+12+2a+b=0$$

$b=-28-2a$로 두고 $f(x)$를 인수분해하여 조건 (나)에 대입하면

$$f(x)=2x^3+3x^2+ax-28-2a$$

$$=(x-2)(2x^2+7x+a+14)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x^2+7x+a+4)}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+7x+a+4}{x+3}$$

$$=\frac{36+a}{5}$$

$$=\frac{26}{5}$$

에서 $a=-10$

따라서 $f(x)=(x-2)(2x^2+7x+4)$이므로

$$f(1)=(-1)\cdot(2+7+4)=-13$$