



03 수1

08 등차수열

01 등차수열의 일반항

02 일반항1 (관계식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 24

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = 5, a_{15} = 25$$

일 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 5

2. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12
- ④ 13 ⑤ 14

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 13

3. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = -15, |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, a_7 의 값은?

- ① 21 ② 23 ③ 25
- ④ 27 ⑤ 29

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 7

4. 공차가-3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 a_7 = 64, a_8 > 0$$

일 때, a_2 의 값은?

- ① 17 ② 18 ③ 19
- ④ 20 ⑤ 21

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 3

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10} 의 값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34
- ④ 36 ⑤ 38

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 16

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 7, a_2 + a_5 = 16$ 일 때,

a_{10} 의 값을 구하시오.

03 수1

08 등차수열

01 등차수열의 일반항

03 일반항2 (조건을 만족시키는 등차수열의 항)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 7

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8, 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
- ④ 14 ⑤ 16

03 수1

08 등차수열

01 등차수열의 일반항

07 중항2 (등차중항을 이용한 간단한 계산)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 3

8. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = 20$ 일 때, a_2 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

03 수1

08 등차수열

02 등차수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 26

9. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$ 를 만족시키는 자연수 k 에 대하여 a_{2k} 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 18

10. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$ 를 만족시키는 자연수 k 에 대하여 a_{2k} 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

11. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_6 = 2(S_3 - S_2)$ 일 때, S_{10} 의 값은?

- ① 100 ② 110 ③ 120
- ④ 130 ⑤ 140

03 수1

09 등비수열

01 등비수열의 일반항

01 일반항1 (관계식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 23

12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = 12$$

일 때, $\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 3

13. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에

대하여 $a_3 = a_2 + 6$ 일 때, a_4 의 값은?

- ① 18 ② 21 ③ 24
- ④ 27 ⑤ 30

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 2

14. 첫째항이 $\frac{1}{8}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_3}{a_2} = 2$ 일 때,

a_5 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
- ④ 2 ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 3

15. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $a_2 a_4 = 36$ 일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의

값은?

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
- ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 5

16. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$ 의 값은?

- ① 16 ② 20 ③ 24
- ④ 28 ⑤ 32

03 수1

09 등비수열

02 등비수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 26

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제

n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_4 - S_3 = 2, \quad S_6 - S_5 = 50$$

일 때, a_5 의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 24

18. 첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터

제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 25

19. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 하자.

$$a_1 = 1, \frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

01 시그마의 뜻1 (표현과 나열)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 12

20. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = -n^2 + n$$

을 만족시킨다. a_{11} 의 값은?

① 88 ② 91 ③ 94

④ 97 ⑤ 100

03 수1

10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

02 시그마의 뜻2 (등차수열)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 15

21. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터

제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값이 최대가

되도록 하는 자연수 m 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
- ④ 11 ⑤ 12

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 20

22. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0, \sum_{k=1}^6 (|a_k| + a_k) = 30$$

일 때, a_9 의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

23. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$

- ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$
- ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

03 수1

10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

03 시그마의 뜻3 (등비수열)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 15

24. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 4(a_2 - a_1), \sum_{k=1}^6 a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 24

25. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2, \frac{a_5}{a_3} = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 28

26. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$ 과

자연수 m 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m 의 값을 구하시오.

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$

(나) $\sum_{k=1}^m a_k = 122$

03 수1

10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

04 시그마의 성질1 (기본성질)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 7

27. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3, \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k^2 - a_k)$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
- ④ 11 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 10

28. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 8, \sum_{k=1}^5 b_k = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k + 4)$ 의 값은?

- ① 19 ② 21 ③ 23
- ④ 25 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 18

29. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 45, \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (b_k - \frac{1}{2})$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 18

30. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^8 a_k = 100$$

일 때, a_8 의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

01 자연수의 거듭제곱의 합1 (기본)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 18

31. $\sum_{k=1}^{10} (4k+a) = 250$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

02 자연수의 거듭제곱의 합2 (식 변형)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 12

32. $\sum_{k=1}^9 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (k-1)^2$ 의 값은?

- ① 91 ② 93 ③ 95
- ④ 97 ⑤ 99

03 수1

10 수열의합

03 여러가지 수열

01 소거형1 (시그마의 성질)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 7

33. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = -4$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13} 의 값은?

- ① -9 ② -7 ③ -5
- ④ -3 ⑤ -1

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

01 항등식과 수열1 (합과 일반항의 관계)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

34. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을

구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 13

35. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하자.

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{a_1} = 2$ 이다.

$n=2$ 일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$ 이므로 $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$ 이다.

$n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$

즉, $S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$ 이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{\boxed{(나)}}{n}$$

이다. 한편 $\sum_{k=3}^n k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^n k(k+1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^n k(k+1) \\ &= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^n \boxed{(다)} \\ &= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7} \end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$ 의 값은?

- ① 3 ② 6 ③ 9
- ④ 12 ⑤ 15

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

03 항등식과 수열3 (일반항 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 25

36. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^5 a_k = 55$ 일

때, $\sum_{k=1}^5 k(a_k - 3)$ 의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

04 활용1 (일반항 구하기, 대수와 식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 26

37. n 이 자연수일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0$$

의 두 근을 α_n, β_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}}$ 의 값을

구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 11

38. n 이 자연수일 때, x 에 대한 이차방정식

$$(n^2 + 6n + 5)x^2 - (n + 5)x - 1 = 0$$

의 두 근의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$ 의 값은?

- ① 65 ② 70 ③ 75
- ④ 80 ⑤ 85

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

07 활용4 (추론, 규칙적인 변화)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 구간

$(0, 1]$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은?

- ① 150 ② 160 ③ 170
- ④ 180 ⑤ 190

03 수1

10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

08 활용5 (여러가지 추론)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 29

40. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$

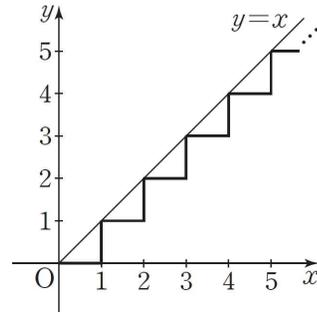
(나) $\sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$

(다) $\sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 29

41. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이

수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n 을 다음과 같은 규칙으로 정한다.



- (i) A_0 은 원점이다.
- (ii) n 이 자연수일 때, A_n 은 점 A_{n-1} 에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2 와 A_6 의 좌표는 각각 $(\frac{4}{25}, 0)$,

$(1, \frac{11}{25})$ 이다. 자연수 n 에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x 좌표를 a 라 하자. a 의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

42. 첫째항이 -45 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d 의 값의 합은?

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$ 인 자연수 m 이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k > -100$ 이다.

- ① 44 ② 48 ③ 52
- ④ 56 ⑤ 60

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

02 점화식2 (등비수열)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 21

43. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1| = 2$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$ 이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값을 구하시오.

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

09 점화식9 (이웃하는 항의 합 또는 곱으로 표현된 점화식)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 11

44. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} = 2n$$

이고 $a_3 = 1$ 일 때, $a_2 + a_5$ 의 값은?

- ① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$
- ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 24

45. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = 3n - 1$$

을 만족시킨다. $a_3 = 4$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 10

46. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 12$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$ 인 자연수 k 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

10 점화식10 (주기수열)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 13

47. 수열 {a_n}은 a₁ = 2이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2-3a_n} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$ 의 값은?

- ① 30 ② 35 ③ 40
- ④ 45 ⑤ 50

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 9

48. 수열 {a_n}이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고, a₁₂ = 1/2일 때, a₁ + a₄의 값은?

- ① 3/4 ② 9/4 ③ 5/2
- ④ 17/4 ⑤ 9/2

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 5

49. 첫째항이 1인 수열 {a_n}이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 7) \\ a_n - 7 & (a_n \geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34
- ④ 36 ⑤ 38

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

11 점화식11 (여러가지 점화식)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 9

50. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$$

을 만족시킨다. a_5 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5
- ④ 7 ⑤ 9

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 21

51. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$
 (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$ 의 값은?

- ① 704 ② 712 ③ 720
- ④ 728 ⑤ 736

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 14

52. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n + 1 \\ a_{3n} = -a_n + 2 \\ a_{3n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 21

53. 수열 $\{a_n\}$ 은 $0 < a_1 < 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
 (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$ 일 때, a_{25} 의 값은?

- ① 78 ② 80 ③ 82
 ④ 84 ⑤ 86

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

54. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 15

55. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라 할 때,

$M - m$ 의 값은?

(가) $a_5 = 5$
 (나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

 이다.

- ① 64 ② 68 ③ 72
 ④ 76 ⑤ 80

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

56. 수열 $\{a_n\}$ 은 $|a_1| \leq 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 이 되도록 하는

모든 a_1 의 값의 합은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

57. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열

$\{a_n\}$ 이 있다.

$a_1 = 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은?

- ① 12 ② 14 ③ 16
- ④ 18 ⑤ 20

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

12 점화식12 (점화식 만들기)

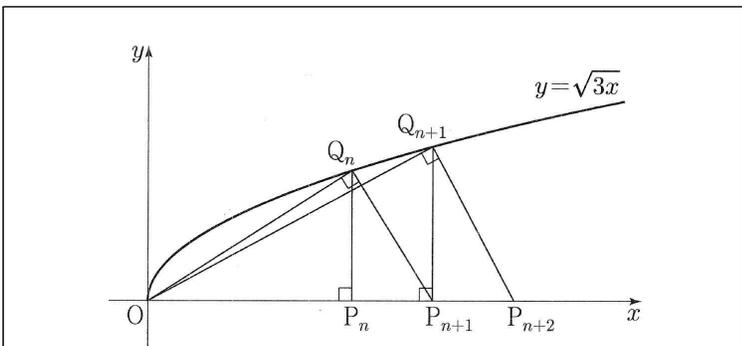
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 16

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월

58. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x 축 위의 점 P_n 과 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n 이 있다.

- (가) 선분 OP_n 과 선분 P_nQ_n 이 서로 수직이다.
- (나) 선분 OQ_n 과 선분 Q_nP_{n+1} 이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1 의 좌표가 $(1, 0)$ 일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$ 의 넓이 A_n 을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)



모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 의 좌표를 $(a_n, 0)$ 이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}} = \overline{OP_n} + \overline{P_nP_{n+1}}$ 이므로

$$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n 과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$ 이 닮음이므로

$$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n 의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$ 이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$ 의 넓이 A_n 은

$$A_n = \frac{1}{2} \times (\boxed{\text{(나)}}) \times \sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p+f(8)$ 의 값은?

- ① 20 ② 22 ③ 24

④ 26

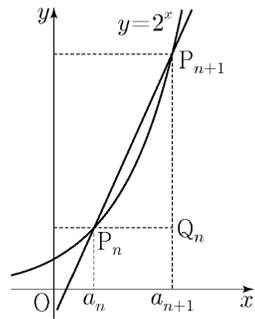
⑤ 28

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 16

59. 상수 $k(k > 1)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이고
 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $P_n(a_n, 2^{a_n}), P_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$ 을
 지나는 직선의 기울기는 $k \times 2^{a_n}$ 이다.

점 P_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선과
 점 P_{n+1} 을 지나고 y 축에 평행한
 직선이 만나는 점을 Q_n 이라 하고
 삼각형 $P_n Q_n P_{n+1}$ 의 넓이를 A_n 이라
 하자.



다음은 $a_1 = 1, \frac{A_3}{A_1} = 16$ 일 때, A_n 을
 구하는 과정이다.

두 점 P_n, P_{n+1} 을 지나는 직선의 기울기가
 $k \times 2^{a_n}$ 이므로 $2^{a_{n+1}-a_n} = k(a_{n+1}-a_n)+1$
 이다. 즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}-a_n$ 은 방정식
 $2^x = kx+1$ 의 해이다.
 $k > 1$ 이므로 방정식 $2^x = kx+1$ 은 오직 하나의 양의
 실근 d 를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{n+1}-a_n = d$ 이고, 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 d 인
 등차수열이다.

점 Q_n 의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$ 이므로

$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\frac{A_3}{A_1} = 16$ 이므로 d 의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$a_n = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $A_n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각

$f(n), g(n)$ 이라 할 때, $p + \frac{g(4)}{f(2)}$ 의 값은?

- ① 118 ② 121 ③ 124
- ④ 127 ⑤ 130

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

60. 두 곡선 $y=16^x, y=2^x$ 과 한 점 $A(64, 2^{64})$ 이 있다.

점 A 를 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$ 과 만나는
 점을 P_1 이라 하고, 점 P_1 을 지나며 y 축과 평행한 직선이
 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 Q_1 이라 하자.

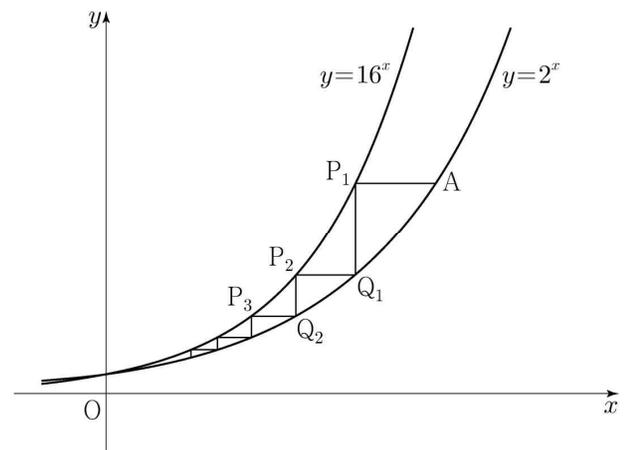
점 Q_1 을 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$ 과 만나는
 점을 P_2 라 하고, 점 P_2 를 지나며 y 축과 평행한 직선이 곡선
 $y=2^x$ 과 만나는 점을 Q_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 두 점을 각각
 P_n, Q_n 이라 하고 점 Q_n 의 x 좌표를 x_n 이라 할 때,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이 되도록 하는

자연수 k 의 개수는?

- ① 48 ② 51 ③ 54
- ④ 57 ⑤ 60



[수학1] [수열] 평가원 최근 5개년(빠른
정답)

년도별경향

2022.12.15

- 1. [정답] 35
- 2. [정답] ①
- 3. [정답] ①
- 4. [정답] ③
- 5. [정답] ⑤

- 6. [정답] 21
- 7. [정답] ②
- 8. [정답] ⑤
- 9. [정답] 7
- 10. [정답] ②

- 11. [정답] ②
- 12. [정답] 36
- 13. [정답] ④
- 14. [정답] ④
- 15. [정답] ⑤

- 16. [정답] ③
- 17. [정답] 10
- 18. [정답] 63
- 19. [정답] 64
- 20. [정답] ②

- 21. [정답] ④
- 22. [정답] 25
- 23. [정답] ③
- 24. [정답] ③
- 25. [정답] 80

- 26. [정답] 162
- 27. [정답] ④
- 28. [정답] ⑤
- 29. [정답] 9
- 30. [정답] 12

- 31. [정답] 3
- 32. [정답] ⑤
- 33. [정답] ④
- 34. [정답] 58

- 35. [정답] ⑤

- 36. [정답] 160
- 37. [정답] 9
- 38. [정답] ①
- 39. [정답] ⑤
- 40. [정답] 117

- 41. [정답] 8
- 42. [정답] ②
- 43. [정답] 678
- 44. [정답] ②
- 45. [정답] 8

- 46. [정답] ④
- 47. [정답] ①
- 48. [정답] ⑤
- 49. [정답] ①
- 50. [정답] ④

- 51. [정답] ④
- 52. [정답] ③
- 53. [정답] ③
- 54. [정답] ②
- 55. [정답] ③

- 56. [정답] ①
- 57. [정답] ②
- 58. [정답] ⑤
- 59. [정답] ⑤
- 60. [정답] ①

[수학1] [수열] 평가원 최근 5개년(해설)

년도별경향

2022.12.15

1) [정답] 35

[해설]

a_n 은 등차수열 이므로

$$a_5 = a_1 + 4d = 5$$

$a_{15} = a_1 + 14d = 25$ 이므로 두 식을 연립하면 $a_1 = -3, d = 2$ 이다.

따라서 $a_{20} = a_1 + 19d = 35$

2) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_7 = 3d, 3d = 6, d = 2$$

따라서

$$a_4 = a_1 + 3d = 4 + 6 = 10$$

3) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -15$ 이고 $|a_3| - a_4 = 0$,

즉, $|a_3| = a_4$ 에서 $a_3 > 0$ 이면 $d = 0$ 이므로 부합하지 않는다.

따라서 $a_3 < 0, a_4 > 0$ 이어야 하므로 $a_3 + a_4 = 0 \dots\dots ㉠$

초항이 -15 , 공차가 d 인 등차수열이므로

$$a_n = -15 + (n-1)d$$

에서 $a_3 = 2d - 15, a_4 = 3d - 15$

$$\therefore a_3 + a_4 = 5d - 30 = 0 \quad (\because ㉠)$$

$$\therefore d = 6$$

따라서 $a_n = 6n - 21$ 이므로 $a_7 = 21$

4) [정답] ③

[해설]

공차가 -3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 초항을 a_1 이라 하면

$$\begin{aligned} a_3 a_7 &= (a_1 + (3-1) \cdot (-3)) \times (a_1 + (7-1) \cdot (-3)) \\ &= (a_1 - 6)(a_1 - 18) \end{aligned}$$

즉, $(a_1 - 6)(a_1 - 18) = 64$ 이므로 $a_1^2 - 24a_1 + 108 = 64$

$$(a_1 - 2)(a_1 - 22) = 0$$

그런데, $a_8 > 0$ 이고, 공차가 -3 이므로 $a_1 = 22$ ($\because a_1 \neq 2$)

$$\therefore a_2 = a_1 + (-3) = 19$$

5) [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a_1 + d = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$a_4 + a_6 = 36$ 에서

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 36$$

$$2a_1 + 8d = 36$$

$$a_1 + 4d = 18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a_1 = 2, d = 4$$

따라서

$$a_{10} = 2 + 9 \times 4 = 38$$

6) [정답] 21

[해설]

$$a_3 + a_4 = a_2 + a_5 \text{이므로 } a_4 = 16 - 7 = 9$$

따라서 공차는 $d = a_4 - a_3 = 2$

$$\therefore a_{10} = a_3 + 7d = 7 + 14 = 21$$

7) [정답] ②

[해설]

$a_n = a + (n-1)d$ 라 하자 $a_1 = a_3 + 8$ 은 $a = a + 2d + 8$ 이고 $d = -4$ (공차)

$$2a_4 - 3a_6 = 3 \text{ 은 } 2a + 6d - 3a - 15d = 3 \text{이 된다.}$$

$d = -4$ 이므로 $a = 33$ 임을 알 수 있다. 즉 일반항

$$a_n = 33 - 4(n-1) = 37 - 4n$$

$\therefore 37 - 4n < 0$ 즉 $\frac{37}{4} < n$

만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 10

8) [정답] ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$a_3 = a_1 + 2d$ 이므로 $a_1 + a_3 = 2a_1 + 2d$

즉, $2a_1 + 2d = 20 \quad \therefore a_1 + d = 10$

따라서 $a_2 = a_1 + d = 10$

9) [정답] 7

[해설]

등차수열의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 이므로 첫째항이

a 이고 공차가 $d=2$ 를 대입하면

$$S_n = n(a+n-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$S_k = -16, S_{k+2} = -12$ 를 만족하므로 $\textcircled{1}$ 에 $n=k, k+2$ 를 각각 대입하면

$$k(a+k-1) = -16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(k+2)(a+k+1) = -12 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{2}$ 에서 $2a + 4k = 2$ 즉, $a = 1 - 2k \quad \dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{4}$ 에 대입하면 $-k^2 = -16, k^2 = 16$

$\therefore k = 4 (\because k > 0)$

$\textcircled{4}$ 에 대입하면 $a = -7$

따라서 일반항 $\{a_n\}$ 이 $a_n = a + (n-1) \cdot 2 = 2n + a - 2$ 이고,

$a = -7, k = 4$ 이므로

$a_{2k} = a_8 = -7 + 7 \times 2 = 7$

10) [정답] ②

[해설]

$S_k = -16, S_{k+2} = -12$

에서

$S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} = 4$

이고, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$a_1 + 2k + a_1 + 2(k+1) = 4$

$a_1 + 2k + 1 = 2$

$a_1 = 1 - 2k \dots\dots \textcircled{1}$

이때 $S_k = -16$ 에서

$$\frac{k\{2a_1 + 2(k-1)\}}{2} = -16$$

$k(a_1 + k - 1) = -16$

여기에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$-k^2 = -16$

k 는 자연수이므로

$k = 4$ 이고,

$a_1 = 1 - 2k = -7$

따라서

$a_{2k} = a_8$

$= -7 + 7 \times 2$

$= 7$

11) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 초항 $a_1 = 2$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1)d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건에서 $a_6 = 2(S_3 - S_2) = 2a_3$ 이므로

$$2 + 5d = 2(2 + 2d) \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $2 + 5d = 4 + 4d$ 이므로 $d = 2$

등차수열의 합 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ 에서

$$S_n = \frac{n(4 + (n-1) \cdot 2)}{2}$$

$\therefore S_{10} = 10 \times 11 = 110$

12) [정답] 36

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = r^2 + r$$

이므로

$$r^2 + r = 12$$

$$(r+4)(r-3)=0$$

$r > 0$ 이므로 $r = 3$

따라서

$$\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3} = r^2 + r^3$$

$$= 3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$$

13) [정답] ④

[해설]

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열이므로 $a_n = r^{n-1}$

$$a_3 = a_2 + 6 \text{에서 } r^2 = r + 6$$

$$r^2 - r - 6 = 0, (r-3)(r+2) = 0$$

$$r = 3 (\because r > 0)$$

따라서 $a_4 = 3^3 = 27$

14) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $\frac{a_3}{a_2} = r$ 에서 $r = 2$

즉, 초항이 $\frac{1}{8}$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$$

따라서 $n = 5$ 을 대입하면 $a_5 = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$

15) [정답] ⑤

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_2 a_4 = 36$ 에서

$a_1 = 2$ 이므로

$$2r \times 2r^3 = 36$$

즉, $r^4 = 9$

따라서 $\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = r^4 = 9$

16) [정답] ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

공비를 $r (r > 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= a_1 r + a_1 r^2 \\ &= \frac{1}{4} r + \frac{1}{4} r^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$r^2 + r - 6 = 0, (r+3)(r-2) = 0$$

$r > 0$ 이므로 $r = 2$

따라서

$$\begin{aligned} a_6 + a_7 &= a_1 r^5 + a_1 r^6 \\ &= \frac{1}{4} \times 2^5 + \frac{1}{4} \times 2^6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

17) [정답] 10

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이므로

$$S_4 - S_3 = a_4 = 2,$$

$$S_6 - S_5 = a_6 = 50$$

a_4, a_5, a_6 에서 등비중항에 의해

$$\{a_5\}^2 = a_4 \times a_6 = 2 \times 50 = 100$$

$$\therefore a_5 = 10$$

18) [정답] 63

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} S_6 - S_2 &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 7r^2 + 7r^3 + 7r^4 + 7r^5 \\ &= 7r^2(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_9 - S_5 &= a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= 7r^5 + 7r^6 + 7r^7 + 7r^8 \\ &= 7r^5(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

이때

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = \frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)} = r^3$$

이므로

$$r^3 = 3$$

따라서 $a_7 \equiv 7r^6 = 7 \times (r^3)^2 = 7 \times 3^2 = 63$

19) [정답] 64

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 $a_4 = ar^3 = r^3$ ($\because a_1 = 1$)

제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1}$$

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1}$$

그런데 조건에서 $\frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$ 이므로

$$\frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 2r^3 - 7, \quad r^3 + 1 = 2r^3 - 7$$

$$\therefore r^3 = 8$$

따라서 $a_7 = r^6$ 에서 $a_7 = 8^2 = 64$

20) [정답] ②

[해설]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

그런데 조건에서 $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = -n^2 + n$, $a_1 = 1$ 이므로

$$a_{n+1} = n^2 - n + 1$$

$$\therefore a_{11} = 91$$

21) [정답] ④

[해설]

$$S_n = \frac{n\{2 \times 50 + (n-1) \times (-4)\}}{2}$$

$$= -2n^2 + 52n$$

$$= -2(n-13)^2 + 2 \times 13^2$$

이므로 S_n 의 값은 $n = 13$ 일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값은 $m = 11$ 일 때 최대가 된다.

22) [정답] 25

[해설]

$a_3 + a_5 = 0$ 에서 $a_4 = 0$ 이다. 공차를 d 라고 하면

수열 $\{a_n\}$ 은 $-3d, -2d, d, 0, d, 2d, \dots$

$$d \leq 0 \text{이면 } 2(-3d - 2d - d) = -12d = 30$$

만족하는 정수 d 가 없다. 따라서 $d > 0$ 이다.

$$\text{그러면 } 2(d + 2d) = 6d = 30, \quad d = 5$$

$$\therefore a_9 = a_4 + 5d = 25$$

23) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수이고 조건

(가)에서

$$a_5 \times a_7 < 0$$

이므로

$$a_5 < 0, \quad a_7 > 0$$

즉, $n \leq 5$ 일 때 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 7$ 일 때

$a_n > 0$ 이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$$

$$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$$

$$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$$

$$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$$

$$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78 \quad \dots \text{㉠}$$

㉠에서 $a_1 + 15 \geq 0$ 이면

$$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$$

$$4a_1 = -63$$

$$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$ 이므로 ㉠에서

$$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$$

$$6a_1 = -93$$

$$a_1 = -\frac{31}{2}$$

따라서

$$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$$

$$= -\frac{31}{2} + 27$$

$$= \frac{23}{2}$$

24) [정답] ㉢

[해설]

a_n 이 등비수열이므로 $a_3 = 4(a_2 - a_1)$ 에서

$$ar^2 = 4(ar - a)$$

$$r^2 = 4r - 4$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$$\therefore r = 2$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 15 \text{ 에서 } a = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

따라서

$$a_1 + a_3 + a_5$$

$$= a + ar^2 + ar^4$$

$$= a(1 + r^2 + r^4)$$

$$= \frac{5}{21}(1 + 2^2 + 2^4)$$

$$= 5$$

25) [정답] 80

[해설]

$\{a_n\}$ 이 초항 $a_1 = 2$, 공비 r 이 양수인 등비수열이므로

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = r^2 = 9$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r > 0) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{2 \times (3^4 - 1)}{3 - 1} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= 80$$

26) [정답] 162

[해설]

첫째항이 2이고 공비를 r (단, r 은 정수)이라 하면

$$a_n = 2r^{n-1} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠에서 $a_2 = 2r$, $a_3 = 2r^2$ 이므로 조건 (가)에 대입하면

$$4 < 2r + 2r^2 \leq 12, \quad 2 < r + r^2 \leq 6$$

따라서 $0 < r^2 + r - 2$, $r^2 + r - 6 \leq 0$ 를 풀면

$$0 < (r+2)(r-1) \text{에서 } r < -2 \text{ 또는 } r > 1$$

$\dots\dots \text{㉡}$

$$(r+3)(r-2) \leq 0 \text{에서 } -3 \leq r \leq 2$$

$\dots\dots \text{㉢}$

$$\text{㉡, ㉢을 연립하면 } -3 \leq r < -2 \text{ 또는 } 1 < r \leq 2$$

그런데 공비 r 이 정수이므로 $r = -3$ 또는 $r = 2$

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^m a_k = 122$ 이므로

(i) $r = -3$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^m 2(-3)^{k-1} = 122$$

$$\frac{2\{(-3)^m - 1\}}{(-3 - 1)} = 122, \quad \{(-3)^m - 1\} = -244$$

$$(-3)^m = -243 \quad \therefore m = 5$$

따라서 ㉠에서 $a_m = 2(-3)^{m-1}$ 이므로 $a_5 = 2(-3)^4$

$$\therefore a_5 = 162$$

(ii) $r = 2$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^m 2(2)^{k-1} = 122$$

$$\frac{2(2^m - 1)}{2 - 1} = 122, \quad 2^m - 1 = 61, \quad 2^m = 62$$

그런데 m 은 자연수이므로 조건에 모순이 된다.

(i), (ii)에서 만족하는 $m=5$ 이므로 $a_m = a_5 = 162$

27) [정답] ④

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k^2 - a_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} a_k \text{ 이고}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 7, \sum_{k=1}^{10} a_k = 3 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = 14 - 3 = 11$$

28) [정답] ⑤

[해설]

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 8, \sum_{k=1}^5 b_k = 9 \text{ 이므로 } \sum \text{의 성질에 의하여}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k + 4) \\ &= 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k + \sum_{k=1}^5 4 \\ &= 2 \times 8 - 9 + 4 \times 5 \\ &= 27 \end{aligned}$$

29) [정답] 9

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 45 \text{ 에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = 45 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 3 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } 3 \sum_{k=1}^{10} b_k = 42$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{10} b_k = 14$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} \left(b_k - \frac{1}{2} \right) = \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \times \frac{1}{2} = 14 - 5 = 9$$

30) [정답] 12

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} = 56 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^8 a_k = 100 \text{ 에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{2} = 50 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a_8}{2} = 6$$

따라서 $a_8 = 12$

31) [정답] 3

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10} (4k + a) = 4 \sum_{k=1}^{10} k + 10a$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10a$$

$$= 220 + 10a$$

즉, $220 + 10a = 250$ 이므로

$$10a = 30$$

따라서

$$a = 3$$

32) [정답] ⑤

[해설]

$$\text{식을 변형하면 } \sum_{k=1}^9 k^2 + 2k + 1 - \sum_{k=1}^9 (k-1)^2 - (10-1)^2 \text{ 과}$$

같다.

$$\sum_{k=1}^9 (k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1) - 81 = \sum_{k=1}^9 4k - 81$$

$$= 4 \times \frac{9 \times 10}{2} - 81 = 180 - 81 = 99$$

33) [정답] ④

[해설]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{4}$ 이므로 $n = 12$ 를 대입하면

$$\frac{1}{a_{13}} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13} = -3$

34) [정답] 58

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n \text{을 만족하므로}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k-3}{a_k}$$

$$= 2n^2 + 7n - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\}$$

$$= 4n + 5$$

$$\text{즉, } \frac{4n-3}{a_n} = 4n + 5 \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{4n-3}{4n+5} \text{ (단, } n \geq 2)$$

$$n = 5 \text{를 대입하면 } a_5 = \frac{17}{25}$$

$$n = 7 \text{를 대입하면 } a_5 = \frac{25}{33}$$

$$n = 9 \text{를 대입하면 } a_5 = \frac{33}{41}$$

$$\therefore a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{17}{25} \times \frac{25}{33} \times \frac{33}{41} = \frac{17}{41}$$

따라서 $p = 41, q = 17$ 이므로 $p + q = 58$

35) [정답] ⑤

[해설]

(i) $n = 1$; $S_1 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{a_1} = 2$

(ii) $n \geq 2$; $\frac{S_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n}{(n+1)!}$

$$S_n = -\frac{n}{n+1}$$

$$n = 2 \text{이면 } a_2 = S_2 - a_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^2 \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$$

$n \geq 3$ 이면

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{a_n} = -n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^n k(k+1)$$

$$= \frac{8}{7} + 2 + 6 - \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

$$= \frac{64}{7} - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}$$

$$\therefore f(n) = n, g(n) = \frac{1}{n(n+1)}, h(k) = k^2$$

$$f(5) \times g(3) \times h(6) = 5 \times \frac{1}{12} \times 36 = 15$$

36) [정답] 160

[해설]

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 55 \text{에서 공차를 } d \text{라 하면}$$

$$\frac{5\{2 \times 3 + 4 \times d\}}{2} = 55$$

$$\therefore d = 4$$

따라서 $a_n = 4n - 1$

$$\sum_{k=1}^5 k(4k - 1 - 3)$$

$$= \sum_{k=1}^5 (4k^2 - 4k)$$

$$= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 4 \times \frac{5 \times 6}{2}$$

$$= 160$$

37) [정답] 9

[해설]

이차방정식 $x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0$ 에서

$$(x-n)(x-n+1) = 0$$

$$x = n \text{ 또는 } x = n-1$$

즉, $\alpha_n = n, \beta_n = n-1$ 또는 $\alpha_n = n-1, \beta_n = n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}} &= \sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{81} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= (\sqrt{1} - 0) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= \sqrt{81} - 0 = 9 \end{aligned}$$

38) [정답] ①

[해설]

$(n^2 + 6n + 5)x^2 - (n+5)x - 1 = 0$ 에서 두 근을

$$x = \alpha, x = \beta \text{라고 하면 } a_n = \alpha + \beta = \frac{n+5}{(n+1)(n+5)} = \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{10} (k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \frac{10(1+10)}{2} + 10 \\ &= 65 \end{aligned}$$

39) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \text{이고 } f(x+1) = f(x) \text{를 만족하므로}$$

(i) $x = 1, 2, 3, \dots$, 즉 $x = (\text{자연수})$ 일 때, $f(x) = 1$

(ii) $x \neq (\text{자연수})$ 일 때, $f(x) = 3$

또, \sqrt{k} 가 자연수가 되려면 k 는 완전제곱수이므로

$$k = 1, 4, 9, 16 \text{일 때, } f(\sqrt{k}) = 1$$

$$k \neq 1, 4, 9, 16 \text{일 때, } f(\sqrt{k}) = 3$$

$$\begin{aligned} &\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{20} \{k \times f(\sqrt{k})\} \\ &= \frac{1}{3} (1 \times 1 + 4 \times 1 + 9 \times 1 + 16 \times 1) \\ &\quad + \frac{1}{3} (2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 3 + \dots + 20 \times 3) \\ &= 10 + (2 + 3 + 5 + 6 + \dots + 20) \\ &\quad \leftarrow (\quad) \text{안에 } 1, 4, 9, 16 \text{이 빠짐} \\ &= 10 + (1 + 2 + 3 + \dots + 20) - (1 + 4 + 9 + 16) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k - 20 \\ &= \frac{20 \times 21}{2} - 20 \\ &= 190 \end{aligned}$$

40) [정답] 117

[해설]

조건 (가)와 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) - \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 67 - 27 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = 40 \quad \dots \textcircled{A}$$

한편, 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r (r 는 음의 정수)라 하면

$$b_1 > 0, b_2 < 0, b_3 > 0, b_4 < 0, b_5 > 0 \text{이므로 } \textcircled{A} \text{에서}$$

$$-2(b_2 + b_4) = 40$$

$$\text{즉, } b_1 r + b_1 r^3 = -20 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$b_1 r(1 + r^2) = -20$$

이다. 이때 $b_1 r$ 는 음의 정수이고, $1 + r^2$ 은 자연수이므로 $1 + r^2$ 은 20의 양의 약수이어야 한다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r 가 음의 정수이므로

$$r = -1 \text{ 또는 } r = -2 \text{ 또는 } r = -3$$

이다. \textcircled{B} 에서

$$r = -1 \text{일 때, } b_1 = 10$$

$$r = -2 \text{일 때, } b_1 = 2$$

$$r = -3 \text{일 때, } b_1 = \frac{2}{3}$$

이때, b_1 은 자연수이므로

$$b_1 = 10, r = -1 \text{ 또는 } b_1 = 2, r = -2$$

(i) $b_1 = 10, r = -1$ 일 때,

$$\sum_{n=1}^5 b_n = 10 \text{ 이므로}$$

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n + \sum_{n=1}^5 b_n = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n + 10 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 17$$

이때, $\sum_{n=1}^5 a_n = 5a_3 = 17$ 에서

$$a_3 = \frac{17}{5}$$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항의 정수이다.

따라서 $b_1 = 10, r = -1$ 은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_1 = 2, r = -2$ 일 때

$$\sum_{n=1}^5 b_n = \frac{2\{1 - (-2)^5\}}{1 - (-2)} = 22$$

조건(가)에서

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^5 a_n + 22 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 5$$

이때, $\sum_{n=1}^5 a_n = 5a_3 = 5$ 에서

$$a_3 = 1$$

$$\text{또, } \sum_{n=1}^5 |b_n| = \frac{2\{1 - |-2|^5\}}{1 - |-2|} = 62$$

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$

이므로

$$\sum_{n=1}^5 |a_n| + \sum_{n=1}^5 |b_n| = 81$$

$$\sum_{n=1}^5 |a_n| + 62 = 81$$

$$\sum_{n=1}^5 |a_n| = 19 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d (d 는 음의 정수)라 하면

$$a_3 = 1$$

$$\text{이므로 } a_1 > a_2 > a_3 > 0 \geq a_4 > a_5$$

이다. 이때,

$$a_1 = 1 - 2d$$

$$a_2 = 1 - d$$

$$a_4 = 1 + d$$

$$a_5 = 1 + 2d$$

이므로 \textcircled{C} 에서

$$(1 - 2d) + (1 - d) + 1 - (1 + d) - (1 + 2d) = 19$$

$$1 - 6d = 19$$

$$d = -3$$

$$\text{따라서 } a_1 = 1 - 2 \times (-3) = 7$$

(i), (ii)에서

$$a_1 = 7, d = -3, b_1 = 2, r = -2$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n

$$a_n = 7 + (n - 1) \times (-3) = -3n + 10$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 b_n 은

$$b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$$

따라서

$$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$$

41) [정답] 8

[해설]

점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P 가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{25} &= \frac{1}{25} \left\{ 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= \frac{n^2}{25} = \left(\frac{n}{5} \right)^2 \end{aligned}$$

점 A_n 이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P 가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$$\left(\frac{n}{5} \right)^2 \text{이 짝수이면 } \frac{n}{5} \text{도 짝수이므로}$$

$$\frac{n}{5} = 2m \quad (m \text{은 자연수})$$

에서 $n = 10m$

따라서 점 A_n 중 직선 $y = x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m = 2$,

즉 $n = 20$ 일 때이므로 점 A_{20} 이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$ (k 는 자연수)일 때 점 P 의 x 좌표는 k 이고, 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P 가 경로를

따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2 = 4^2 = 16$ 이므로 점 A_{20} 의 x 좌표는 8이다. 즉, $a = 8$

42) [정답] ②

[해설]

$a_1 = -45 < 0$ 이고 $d > 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$a_m < 0, a_{m+3} > 0$$

즉, $-a_m = a_{m+3}$ 에서 $a_m + a_{m+3} = 0$

따라서

$$\begin{aligned} \{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\} &= 0 \\ -90 + (2m+1)d &= 0 \\ (2m+1)d &= 90 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이고 $2m+1$ 은 1보다 큰 홀수이므로 d 는 짝수이다.

그런데, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1)d\}}{2} > -100 \\ n\{-90 + (n-1)d\} &> -200 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{2}$ 을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d 의 값의 합은 $18 + 30 = 48$

43) [정답] 678

[해설]

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$|a_n| = 2^n$$

한편,

$$\sum_{k=1}^9 |a_k| = \sum_{k=1}^9 2^k = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 2,$$

$$|a_{10}| = 2^{10}$$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = -14$$

를 만족하기 위해서는

$$a_1 = -2, a_2 = -4$$

$$\sum_{k=3}^9 a_k = \sum_{k=3}^9 2^k = \frac{2^3(2^7 - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 8,$$

$$a_{10} = -1024$$

이어야 한다.

따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 \\ &= 678 \end{aligned}$$

44) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $a_n a_{n+1} = 2n$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 대입하면

$$n = 1 \text{일 때, } a_1 a_2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n = 2 \text{일 때, } a_2 a_3 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$n = 3 \text{일 때, } a_3 a_4 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$n = 4 \text{일 때, } a_4 a_5 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$a_3 = 1$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서 $a_2 = 4$, $\textcircled{3}$ 에서 $a_4 = 6$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{에 대입하면 } a_1 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore a_2 + a_5 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

45) [정답] 8

[해설]

$a_1 + a_2 = 2$ 이고, $a_2 + a_3 = 5$, $a_3 = 4$ 이므로 $a_2 = 1, a_1 = 1$ 이다.

또한, $a_3 + a_4 = 8$, $a_4 + a_5 = 11$ 이므로 $a_4 = 4, a_5 = 7$ 이다.

$a_1 + a_5 = 8$ 이다.

46) [정답] ④

[해설]

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n \text{에서}$$

$$a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

이때, $a_1 = 12$ 이므로

$$a_2 = -a_1 + 1 = -11$$

$$a_3 = -a_2 - 2 = 9$$

$$a_4 = -a_3 + 3 = -6$$

$$a_5 = -a_4 - 4 = 2$$

$$a_6 = -a_5 + 5 = 3$$

$$a_7 = -a_6 - 6 = -9$$

$$a_8 = -a_7 + 7 = 16$$

따라서, $a_k > a_1$ 을 만족시키는 k 의 최솟값은 8이다.

47) [정답] ①

[해설]

$a_1 = 2$ 이므로

$$a_2 = \frac{a_1}{2-3a_1} = \frac{2}{2-3 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + a_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2-3a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{2-3 \times \frac{1}{2}} = 1$$

$$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$$

이때 $a_1 = a_5$ 이고 1, 5가 모두 홀수이므로

$a_2 = a_6, a_3 = a_7, a_4 = a_8, \dots$, 즉 $a_n = a_{n+4}$ (n 은 자연수)가

성립한다.

따라서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \dots = a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{40} a_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 10 \\ &= \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1 \right\} \times 10 \\ &= 3 \times 10 = 30 \end{aligned}$$

48) [정답] ⑤

[해설]

$$a_2 = \frac{1}{a_1},$$

$$a_3 = 8a_2 = \frac{8}{a_1},$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{a_1}{8},$$

$$a_5 = 8a_4 = a_1,$$

⋮

따라서 $a_1 = a_5 = a_9 = \dots, a_2 = a_6 = a_{10} = \dots,$

$a_3 = a_7 = a_{11} = \dots$

$a_4 = a_8 = a_{12} = \dots$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 a_1, a_2, a_3, a_4 가 반복되는 형태의 수열이다.

조건에서 $a_{12} = \frac{1}{2}$ 이므로 $a_{12} = a_4 = \frac{a_1}{8} = \frac{1}{2}$ 을 만족한다.

즉, $a_1 = 4, a_4 = \frac{1}{2}$ 이므로 $a_1 + a_4 = \frac{9}{2}$

49) [정답] ①

[해설]

$a_1 = 1$ 이므로 $a_2 = 2$

$a_2 = 2$ 이므로 $a_3 = 4$

$a_3 = 4$ 이므로 $a_4 = 8$

$a_4 = 8$ 이므로 $a_5 = 1$

$a_5 = 1$ 이므로 $a_6 = 2$

$a_6 = 2$ 이므로 $a_7 = 4$

$a_7 = 4$ 이므로 $a_8 = 8$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= 2 \times (1 + 2 + 4 + 8) \\ &= 2 \times 15 \\ &= 30 \end{aligned}$$

50) [정답] ④

[해설]

$a_1 = 1$ 이므로 $a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 대입하면

(i) $n = 1$ 일 때, $a_2 - a_1 = 2$

$$\therefore a_2 = 3$$

(ii) $n = 2$ 일 때, $a_3 + a_2 = 4$

$\therefore a_3 = 1$

(iii) $n = 3$ 일 때, $a_4 - a_3 = 8$

$\therefore a_4 = 9$

(iv) $n = 4$ 일 때, $a_5 + a_4 = 16$

$\therefore a_5 = 7$

51) [정답] ④

[해설]

$a_{20} = a_{10} - 1$ 에서 $a_{20} = 1$ 이므로

$a_{10} = 2$

또, $a_{10} = a_5 - 1$ 에서

$a_5 = 3$

$a_5 = 2a_2 + 1$ 에서

$a_2 = 1$

$a_2 = a_1 - 1$ 에서

$a_1 = 2$

한편, $a_{2n} + a_{2n+1} = (a_n - 1) + (2a_n + 1) = 3a_n$ 이므로

$a_2 + a_3 = 3a_1$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 3a_2 + 3a_3 = 3^2a_1$

$a_8 + a_9 + \dots + a_{15} = 3a_4 + 3a_5 + \dots + 3a_7 = 3^3a_1$

$a_{16} + a_{17} + \dots + a_{31} = 3a_8 + 3a_9 + \dots + 3a_{15} = 3^4a_1$

$a_{32} + a_{33} + \dots + a_{63} = 3a_{16} + 3a_{17} + \dots + 3a_{31} = 3^5a_1$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{63} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) \\ &\quad + (a_8 + \dots + a_{15}) + (a_{16} + \dots + a_{31}) \\ &\quad + (a_{32} + \dots + a_{63}) \\ &= a_1(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) \\ &= 2 \times \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728 \end{aligned}$$

52) [정답] ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이, 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{3n-1} = 2a_n + 1, a_{3n} = -a_n + 2, a_{3n+1} = a_n + 1$

위 식을 변변히 더하면

$a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1} = 2a_n + 4$

$n = 4$ 를 대입하면 $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 2a_4 + 4$

그런데, $a_{3n+1} = a_n + 1$ 에서 $a_4 = a_1 + 1 = 2$

$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} = 4 + 4 = 8$

53) [정답] ③

[해설]

조건 (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$ 에서

$n = 1$ 을 대입하면 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$ 이므로

$a_2 \times a_1 = a_2 - 1 \dots\dots \textcircled{㉠}$

$n = 2$ 을 대입하면 $a_4 = (a_2)^2 + 1 \dots\dots \textcircled{㉡}$

$n = 4$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} a_8 &= a_2 \times a_4 + 1 \\ &= a_2 \times \{(a_2)^2 + 1\} + 1 \quad (\because \textcircled{㉡}) \\ &= (a_2)^3 + a_2 + 1 \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

조건 (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$ 에서

$n = 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 \times a_1 - 2 \\ &= a_2 - 3 \quad (\because \textcircled{㉠}) \dots\dots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

$n = 3$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a_7 &= a_2 \times a_3 - 2 \\ &= a_2 \times (a_2 - 3) - 2 \quad (\because \textcircled{㉣}) \\ &= (a_2)^2 - 3a_2 - 2 \dots\dots \textcircled{㉤} \end{aligned}$$

$n = 7$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_2 \times a_7 - 2 \\ &= a_2 \times \{(a_2)^2 - 3a_2 - 2\} - 2 \quad (\because \textcircled{㉤}) \\ &= (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2 \dots\dots \textcircled{㉥} \end{aligned}$$

이때, $a_8 - a_{15} = 63$ 이므로 ㉢, ㉥에 의해

$\{(a_2)^3 + a_2 + 1\} - (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2 = 63$

즉, $\{a_2\}^2 + \{a_2\} - 20 = 0$ 이므로

$$(a_2 - 4)(a_2 + 5) = 0$$

$$\therefore a_2 = -5 \text{ 또는 } a_2 = 4$$

(i) $a_2 = -5$ 일 때, ㉠에서 $-5a_1 = -6$

$$\therefore a_1 = \frac{6}{5}$$

그런데, 조건에서 $0 < a_1 < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 = 4$ 일 때, ㉠에서 $4a_1 = 3$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{4}$$

그런데, 조건에서 $0 < a_1 < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4$

$$\begin{aligned} a_{25} &= a_2 \times a_{12} - 2 \\ &= 4a_{12} - 2 \quad (\because a_2 = 4) \\ &= 4(a_2 \times a_6 + 1) - 2 \\ &= 16a_6 + 2 \\ &= 16(4a_3 + 1) + 2 \\ &= 64a_3 + 18 \\ &= 82 \quad (\because \text{㉡에서 } a_3 = 1) \end{aligned}$$

54) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$ 에 $n=3$ 을

대입하면

$$a_5 = \begin{cases} 2a_3 + a_4 & (a_4 \geq 2) \\ a_3 + a_4 & (a_4 < 2) \end{cases}$$

그런데 $a_3 = 2$ 이므로

$$a_5 = \begin{cases} a_4 + 4 & (a_4 \geq 2) \\ a_4 + 2 & (a_4 < 2) \end{cases}$$

따라서 위 식에서 어떤 경우에도 $a_4 \leq a_5$ 이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5$$

(i) $a_4 \geq 2$ 인 경우

$$a_6 = 2a_4 + (a_4 + 4) = 3a_4 + 4 = 19$$

$$\therefore a_4 = 5$$

준 식에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_4 = \begin{cases} 2a_2 + 2 & (a_2 \leq 2) \\ a_2 + 2 & (a_2 > 2) \end{cases} \quad (\because a_3 = 2)$$

㉠ $2a_2 + 2 = 5$ 일 때, $a_2 = \frac{3}{2}$

$$a_3 = \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2 & (a_1 \leq a_2) \\ a_1 + a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$$

즉, $2a_1 + \frac{3}{2} = 2$ (단, $a_1 \leq a_2$) 또는

$a_1 + \frac{3}{2} = 2$ (단, $a_1 > a_2$)를 만족하는 a_1 은

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

㉡ $a_2 + 2 = 5$ 일 때, $a_2 = 3$

$$a_3 = \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2 & (a_1 \leq a_2) \\ a_1 + a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$$

즉, $2a_1 + 3 = 2$ (단, $a_1 \leq a_2$) 또는

$a_1 + 3 = 2$ (단, $a_1 > a_2$)를 만족하는 a_1 은

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

(ii) $a_4 < 2$ 인 경우

$$a_6 = 2a_4 + (a_4 + 2) = 3a_4 + 2 = 19$$

$a_4 = \frac{17}{3}$ 인데 $a_4 < 2$ 이므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 만족하는 a_1 은 $a_1 = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$ 이므로 모든

$$a \text{ 값의 합은 } \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

55) [정답] ③

[해설]

주어진 조건에 의하면 $n \geq 5$ 일 때 a_n 은 한가지 이다

따라서 a_4, a_3, a_2, a_1 의 값만 확인한다.

$a_n < 0$ 이면 $a_{n+1} = -2a_n + 3 > 0$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 값이 연속하여 음수인 경우는 없다.

따라서 최댓값은 $a_{n+1} = a_n - 6$ 일 때

즉 $a_4 = 11, a_3 = 17, a_2 = 23, a_1 = 29$ 일 때이다.

최솟값은 (나)의 관계식이 번갈아 나오는 경우

즉 $a_4 = -1, a_3 = 5, a_2 = -1, a_1 = 5$ 일 때이다.

$$\therefore M - m = (11 + 17 + 23 + 29) - (-1 + 5 - 1 + 5)$$

$$= 80 - 8 = 72$$

56) [정답] ①

[해설]

먼저 a_5 의 값을 구해보자.

(i) $-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2}$ 일 때, $a_6 = -2a_5 - 2$ 이므로

$$a_5 + a_6 = 0 \text{에서 } -a_5 - 2 = 0$$

즉, $a_5 = -2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2}$ 일 때, $a_6 = 2a_5$ 이므로 $a_5 + a_6 = 0$ 에서

$$3a_5 = 0 \text{ 즉, } a_5 = 0$$

(iii) $\frac{1}{2} < a_5 \leq 1$ 일 때, $a_6 = -2a_5 + 2$ 이므로 $a_5 + a_6 = 0$ 에서

$$-a_5 + 2 = 0 \text{ 즉, } a_5 = 2 \text{이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a_5 = 0$

이때 $a_4 = -1$ 또는 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = 1$ 이다.

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ 일 때,

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} \text{ 또는 } a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n+1}$$

(i) $a_4 = -1$ 인 경우

$$a_3 < 0, a_2 < 0, a_1 < 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $a_4 = 0$ 인 경우

㉠ $a_3 = -1$ 인 경우

$$a_2 < 0, a_1 < 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

㉡ $a_3 = 0$ 인 경우

$$a_2 = 0 \text{ 또는 } a_2 = 1 \text{이고,}$$

$$a_2 = 0 \text{일 때 } a_1 = 1 \text{이면 조건을 만족시키고,}$$

$$a_2 = 1 \text{일 때, } a_1 = \frac{1}{2} \text{이고 이 경우도 조건을}$$

만족시킨다.

㉢ $a_3 = 1$ 인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2} \text{이고 이때 } a_1 = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a_1 = \frac{3}{4} \text{이며,}$$

이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4 = 1$ 인 경우

$$a_3 = \frac{1}{2} \text{이고 이때 } a_2 = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a_2 = \frac{3}{4}$$

㉣ $a_2 = \frac{1}{4}$ 인 경우

$$a_1 = \frac{1}{8} \text{ 또는 } a_1 = \frac{7}{8} \text{이고 이것은 조건을 만족시킨다.}$$

㉤ $a_2 = \frac{3}{4}$ 인 경우

$$a_1 = \frac{3}{8} \text{ 또는 } a_1 = \frac{5}{8} \text{이고 이것은 조건을 만족시킨다.}$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$$

57) [정답] ②

[해설]

$$a_1 = 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$a_2 > 0 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

$$a_3 < 0 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k(k+1)}$$

이때 $k=1$ 이면 $a_4 = 0$ 이므로 $n = 3m - 2$

(m 은 자연수)일 때 $a_n = 0$ 이다.

$a_{22} = 0$ 이므로 $k=1$ 은 조건을 만족시킨다.

한편 $k > 1$ 이면 $a_4 > 0$ 이므로

$$a_5 = a_4 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

$$a_5 < 0 \text{이므로}$$

$$a_6 = a_5 + \frac{1}{k+1} = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k(k+1)}$$

이때 $k=2$ 이면 $a_6 = 0$ 이므로 $n = 5m - 4$

(m 은 자연수)일 때 $a_n = 0$ 이다. 즉,

$a_{22} \neq 0$ 이므로 $k=2$ 는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k > 2$ 이면 $a_6 > 0$ 이므로

$$a_7 = a_6 - \frac{1}{k} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$$

$$a_7 < 0 \text{이므로}$$

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k(k+1)}$$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$ 이면 $a_8 = 0$ 이고 이때 $a_{22} = 0$ 이다.

$k=4$ 이면 $a_{10} = 0$ 이고 이때 $a_{22} \neq 0$ 이다.

$5 \leq k \leq 9$ 이면 $a_{22} \neq 0$ 이다.

$k=10$ 이면 $a_{22} = 0$ 이다.

$k \geq 11$ 이면 $a_{22} \neq 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k 의 값의 합은

$$1 + 3 + 10 = 14$$

58) [정답] ⑤

[해설]

점 P_n 의 좌표를 $(a_n, 0)$, 점 Q_n 의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$ 라 하면

$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$ 에서

$$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$$

$$\therefore \overline{P_nP_{n+1}} = \boxed{3}$$

$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}}$ 이므로 $a_{n+1} = a_n + 3$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$A_n = \frac{1}{2} \times \overline{OP_{n+1}} \times \overline{P_nQ_n}$$

$$= \frac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{3(3n-2)} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{9n-6}$$

즉, $p=3$, $f(n)=3n+1$ 이므로 $p+f(8)=3+25=28$

59) [정답] ⑤

[해설]

$$\frac{A_3}{A_1} = 16 \text{ 이므로 } \frac{2^{a_3+d} - 2^{a_3}}{2^{1+d} - 2} = \frac{2^{1+3d} - 2^{1+2d}}{2^{1+d} - 2^1} = 16 \text{ 에서 } d=2$$

$$2^x = kx + 1 \text{ 에서 } 2^2 = 2k + 1, k = \frac{3}{2}$$

$a_1 = 1$ 이고, $d = 2$ 이므로 $a_n = 2n - 1$ 이므로 $f(2) = 3$

$$A_n = \frac{1}{2} \times 2 \times (2^{2n+1} - 2^{2n-1}) = 3 \times 2^{2n-1} \text{ 이므로 } g(4) = 3 \times 2^7$$

$$p + \frac{g(4)}{f(2)} = 2 + \frac{3 \times 2^7}{3} = 130$$

60) [정답] ①

[해설]

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1 의 x좌표는 x_1 이다.

이때 두 점 A와 P_1 의 y좌표가 같으므로

$$2^{64} = 16^{x_1} \text{에서}$$

$$2^{64} = 2^{4x_1}$$

$$4x_1 = 64 \text{에서}$$

$$x_1 = 16$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여

두 점 P_n, Q_n 의 x좌표는 x_n 으로 서로

같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 y좌표는 같으므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$$

즉,

$$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$$

이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인

등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이므로

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } x_6 < \frac{1}{k}$$

이어야 한다.

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-4} \geq \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \text{에서 } k \geq 16 \dots \textcircled{1}$$

$$x_6 < \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-6} < \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \text{에서 } k < 64 \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 자연수 k 의 개수는 $64 - 16 = 48$ 이다.