[유형별한글] [수학2] 사관학교 최근5개년

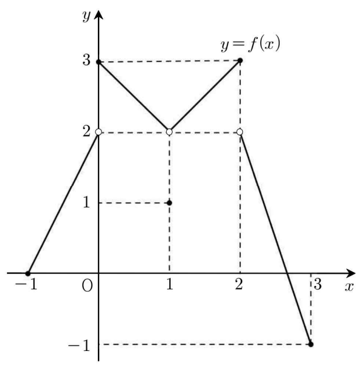
04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

01 좌극한과 우극한1 (그래프 조건)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 5

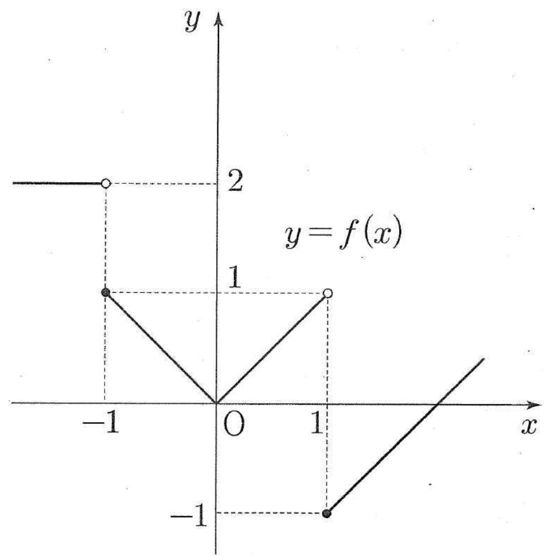
1. 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.

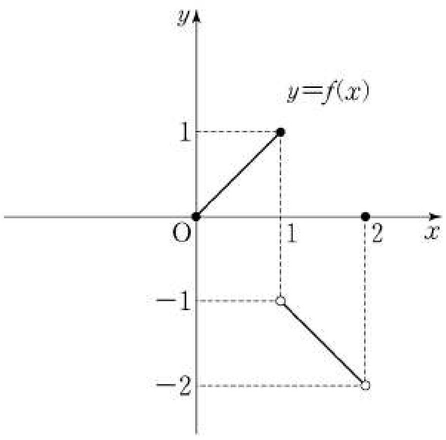


$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

3. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0, 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)+\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$의 값은?



① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

04 수2　01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

07 좌극한과 우극한7 (추론)

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (|x|<2) \\ 0 & (|x|=2) \\ -|x|+4 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim\limits_{x \to a-} f(x)=1$을 만족시키는 정수 a의 개수는?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

5. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ x-2 & (x\geq 1) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} -x & (x<1) \\ 1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to 1-} g(x)$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\leq 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

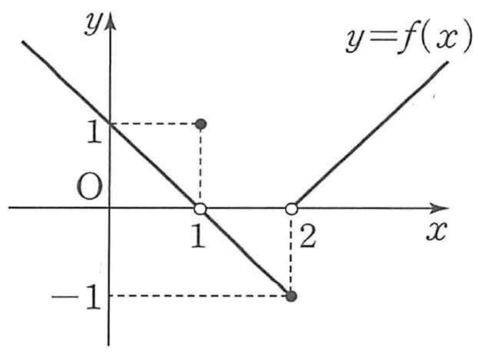
① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

04 해석4 (인수를 이용한 다항식의 결정)

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



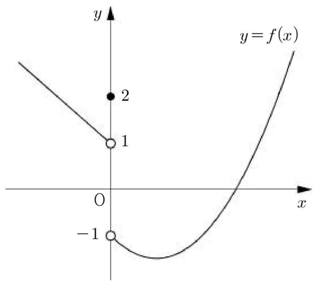
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$와 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$의 값이 모두 존재할 때, $g(6)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 11

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}=1,\quad \lim_{x\to 1-}f(x-1)g(x)=3$$

일 때, $g(2)$의 값은?



① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

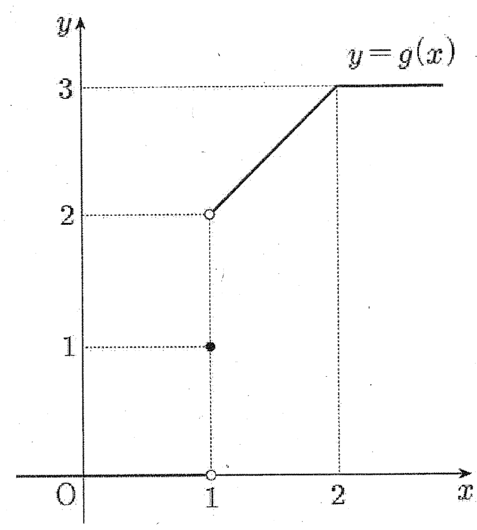
9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(0)+f(2)$
(나) 열린 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수의 그래프의 일부이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x)}{x^2}<0$

ㄷ. $\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|f(x)|$이면, $f(-1)\geq -9$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

06 연속성6 (점정의함수)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 25

10. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-8x+a}{x-6} & (x \neq 6) \\ b & (x=6) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-10}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

12. 다음 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 정하시오.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+a}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

04 수2　　02 함수의 연속성

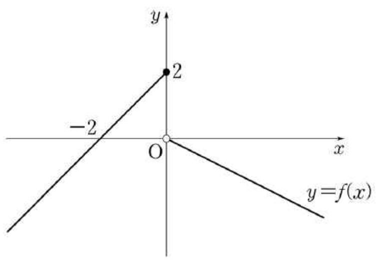
01 함수의 연속성

09 연속성9 (함수의 사칙연산)

[출처] 2014 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성

[출처] 2020 일반_시중교재 희망에듀 임정선 마플시너지

13. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

14. 함수 $f(x)=x^2+2x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

15. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

04 수2　　02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

02 불연속 후보군2 (연속X불연속)

[출처] 2019 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 레벨1 기초연습

[출처] 2020 일반_시중교재 희망에듀 임정선 마플시너지

16. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ x^2 & (x \geq -1) \end{cases}$과 $g(x)=x-a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 11

17. 함수 $f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

18. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x<-1) \\ |x-1| & (x \geq -1) \end{cases}$과 함수 $g(x)=k|x-a|$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(0)=f(-1)$일 때, $g(2)$의 값은? (단, a, k는 상수이고 $k \neq 0$이다.)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

03 미분법 공식2 (극한식의 해석)

19. 함수 $f(x)=3x^3+ax+2$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{5h}=8$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 9

20. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에 대하여

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=9$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 4

21. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+ax+6$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}=1$$

일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

06 미분법 공식5 (곱의 미분법, 극한식의 해석)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

22. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}=2$일 때, 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

23. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=4$를 만족시킨다. 함수 $g(x)=x^2f(x)$에 대하여 $g'(2)$의 값을 구하시오.

24. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$$

을 만족시킨다. $g(x)=(x^2+1)f(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35
④ 40 ⑤ 45

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

02 활용2 (함수 구하기, 해석)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 25

25. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}$일 때, $60\times f'(0)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

26. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-4}{x}+\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+k}{x-2}=0$$

일 때, 상수 k의 값은?

① -6　② -4　③ -3
④ -2　⑤ -1

04 수2　03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

04 미분가능조건1 (구간정의함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 8

28. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x<a) \\ 2x+b & (x\ge a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

29. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<b) \\ 4x+a & (x \geq b) \end{cases}$ 가 $x=b$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

30. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+x & (x<k) \\ x^2+4x-2 & (x \geq k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

05 기울기2 (접점의 좌표)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

31. 곡선 $y=-x^3+3x^2+4$에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

32. 삼차함수 $f(x)=-2x^3+3x+2$의 그래프 위의 점에서의 접선 중에서 기울기가 최대인 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $g(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

33. 다음 <보기>에서 곡선 $y=x^3+3x^2+4x$의 접선이 될 수 있는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $y=\frac{1}{2}x+3$

ㄴ. $y=4x$

ㄷ. $y=x-2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

07 활용7 (추론과 이해)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

34. 함수 $f(x)=(x-2)^3$과 두 실수 m, n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<a) \\ mx+n & (|x|\geq a) \end{cases} \quad (a>0)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $m=13$이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $m=48$이다.

ㄷ. $f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

03 극대와 극소3 (사차함수의 극대와 극소)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 6

35. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^2+b$가 $x=a$에서 극소이고, 극댓값 $a+8$을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

36. 사차함수 $f(x)=x^2(3x^2+4x-12)+a$의 극댓값이 10일 때, 모든 극솟값의 합은? (단, a는 상수이다.)

① -11 ② -13 ③ -15
④ -17 ⑤ -19

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

03 활용3 (구간정의함수)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

37. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 21

38. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)< mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, m의 값은?

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

39. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x<k) \\ ax^2+bx-9 & (x\geq k) \end{cases}$$

와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)$$

라 하자. $t=\frac{1}{3}k$일 때, 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다. $f(2k)$의 값을 구하시오. (단, a, b, k는 상수이고 $a>0$이다.)

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

05 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

40. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

41. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 4를 갖는다.

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

42. 모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$가 $x=p$에서 극솟값 q를 가질 때, $p\times q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

① 8 ② 4 ③ 2
④ -4 ⑤ -8

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

43. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

44. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(가) $f(1)=f'(1)=0$

(나) 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않다.

(다) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(0)>0$이면 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(2)$의 최댓값은 19이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하지 않은 x의 값의 개수는 1이다.

(나) 함수 $y=|xf(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수 $y=|xf(x)|$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{27}{4}$
④ $\frac{27}{8}$ ⑤ $\frac{27}{16}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

07 활용7 (정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

46. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오.

47. 양의 실수 t와 $f(x)=-x^3+9|x|$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P(t, f(t))와 x축 위의 점 $Q(q,\ 0)$이 있다. 직선 PQ와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하고, 두 집합 A, B를 각각

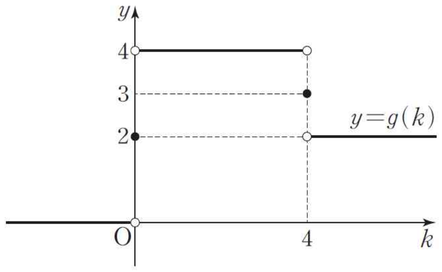
$$A=\left\{a \,\middle|\, \lim_{t\to a-} g(t)=\lim_{t\to a+} g(t),\ a>0\right\},$$

$$B=\{b\,|\,\text{함수 } g(t)\text{는 } y=b\ (b>0)\text{에서 불연속이다.}\}$$

라 하자. $2\in(A\cap B)$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은? (단, q는 양의 상수이다.)

① $\frac{32}{3}+\sqrt{21}$ ② $\frac{34}{3}+\sqrt{21}$ ③ $12+\sqrt{21}$ ④ $\frac{38}{3}+\sqrt{21}$ ⑤ $\frac{40}{3}+\sqrt{21}$

48. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $y=g(k)$의 그래프가 그림과 다음과 같고, $f(1)\neq 0$, $f'(1)=0$일 때, $f(4)$의 최댓값을 구하시오.



04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

03 최대와 최소3 (Mm 조건 해석)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

49. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1\le x\le 1) \\ x^2-4x+a & (1<x\le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -5 ② $-\dfrac{9}{2}$ ③ -4

④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ -3

50. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 최댓값이 $\frac{4}{9}$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

51. 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (|x|\le 2)\\ 16 & (|x|>2)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 16보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g'(0)=0$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(0)$이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(1)=6$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

10 방정식과 미분10 (정의된 함수)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

52. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 195 ② 200 ③ 205
④ 210 ⑤ 215

53. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$

(나) $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $y=g(t)$가 $|t|\neq 2$인 모든 실수 t에 대하여 연속이다. $g(-2)+\lim_{t\to 2-} g(t)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

54. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x|x-k|$$

이다. 함수 $g(x)=x^2-3x-4$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(2)=2$

ㄴ. $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

ㄷ. $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

02 부등식과 미분2 (제한범위)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 18

55. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-5x^2+3x+n \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

56. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$2x^3-3x \geq 3x+a$를 만족시키는 실수 a의 최댓값은?

① -5 ② -4 ③ -3

④ -2 ⑤ -1

57. 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 부등식 $x^3-\frac{9}{2}x^2+a \leq 0$이

성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

04 수2 07 부정적분

02 부정적분의 계산

03 부정적분의 계산3 (도함수로 표현된 함수의 부정적분)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 25

58. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=4x^3+4x+1$이다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 5

59. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이고 $f(0)=-2$, $f(1)=1$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 17

60. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+6x-4$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

07 함수 구하기7 (도함수 구하기)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

61. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다.
(나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

09 활용2 (함수의 상황)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

62. 0이 아닌 실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=3(x-k)(x-2k)$이다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 1\text{또는 } x\ge 4) \\ \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1<x<4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha\le k<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

10 활용3 (극대와 극소)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

63. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
> (나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k$, $t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t\to k+} g(t)=-2,\quad \lim_{t\to 30+} g(t)=1$$

일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k<30$)

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

13 계산과 해석6 (추론과 해석)

64. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)=xf(x)$
> (나) $g(x)\ge 0$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=g(x)$는 적어도 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$중 크지 않은 값이라 할 때, 함수 $h(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx=1$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

65. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

66. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 $0\le x<4$에서

$$h(x)=\begin{cases} x & (0\le x<2) \\ f(x) & (2\le x<3) \\ g(x) & (3\le x<4) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=h(x-4)+k$ (k는 상수)이다.

(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(다) $\int_0^4 h(x)\,dx=6$

$h\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2　　08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

01 정적분 전체를 치환하는 유형

[출처]　2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

67. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2+\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{9}{4}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{11}{4}$
④ 3　⑤ $\frac{13}{4}$

68. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=3x^2+(2x-2)\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족할 때, $f(0)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

69. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=-x^2+5x+4\int_0^2 tf(t)dt$가 성립할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $\frac{11}{12}$　② $\frac{7}{6}$　③ $\frac{17}{12}$
④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{23}{12}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수1 (적분함수)

70. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서

$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - 2ax^2 + a$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

71. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 + ax - 3$$

을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

72. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^x f(t)\,dt = ax + 4 + \int_1^x (3t^2 - 2t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^3 f(x)\,dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

03 정적분으로 정의된 함수2 (피적분함수의 변수와 상수의 구분)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

73. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (2x-1)f(t)\,dt = x^3+ax+b$$

일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

74. 임의의 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^4-x^3+ax^2-bx+1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

75. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x (t^3+at^2+bt)dt$$

를 만족시킬 때, $10f(b-a)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

09 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

76. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^{x} f(t)dt=12$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=1$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

10 활용6 (정의된 함수)

77. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=\int_{0}^{x}\{3t^2-2(n+6)t+6n\}dt$$

일 때, 방정식 $|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 0이 아닌 실수 a의 개수를 $g(n)$이라 하자. 이때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값은?

① 48 ② 49 ③ 50
④ 51 ⑤ 52

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

78. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 30

79. 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to a+} h(t)-\lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

03 정적분과 넓이3 (그래프 그리기)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 18

80. 곡선 $y=x^3+2x$와 y축 및 직선 $y=3x+6$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

81. 곡선 $y=x^3+x$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합을 S라 할 때, $60S$의 값을 구하시오.

82. 곡선 $y=x^3+3x^2-1$위의 두 점 $(-3,\ -1)$과 $(1,\ 3)$을 지나는 직선과 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

08 정적분과 넓이8 (함수결정 후 넓이)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

83. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=2x^2+ax$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 레벨3 실력완성

84. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2,\ \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{(x-3)^2}=6$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 정의역이 $\{x|x\ge 0\}$인 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x\le 4)\\ f(x-4n)+8n & (4n\le x\le 4n+4)\end{cases}$$

일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $x=16$및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 272 ② 284 ③ 296
④ 308 ⑤ 320

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 06 다항함수의 적분법 유형8

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 06 다항함수의 적분법 유형8

85. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<2$일 때, $f(x)=-x^2+\frac{5}{2}x+1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+1$이다.

닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{3}{5}x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2　　09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

09 정적분과 넓이9 (곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이)

86. 곡선 $y=2x^3-8x^2+8x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l과 곡선 $y=2x^3-8x^2+8x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S가 된다. 직선 l의 방정식과 S의 값을 모두 구하고 그 풀이과정을 서술하시오.

87. 곡선 $y=x^3-4x^2-x+4$와 이 곡선 위의 점 $(2,\ -6)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$

④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

[출처]　2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

88. 곡선 $y=x^3+x-3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

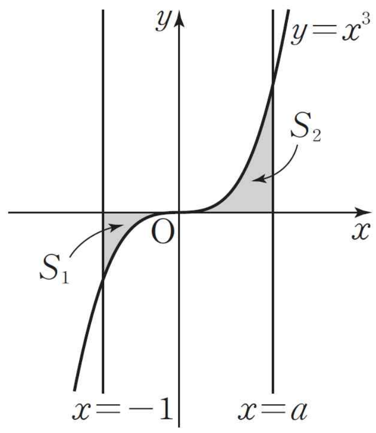
04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

01 넓이와 해석1 (넓이조건과 관계식)

89. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^n$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_3-S_n>\dfrac{6}{25}$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

90. 그림과 같이 곡선 $y=x^3$과 직선 $x=-1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x^3$과 직선 $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=4S_1$일 때, a^{10}의 값을 구하시오. (단, $a>0$)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

91. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오.

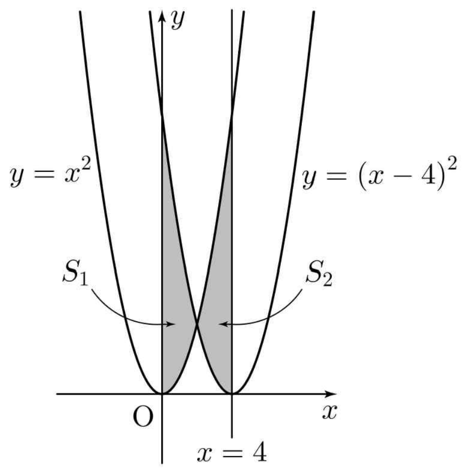
04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

05 넓이와 해석5 (함수의 대칭성)

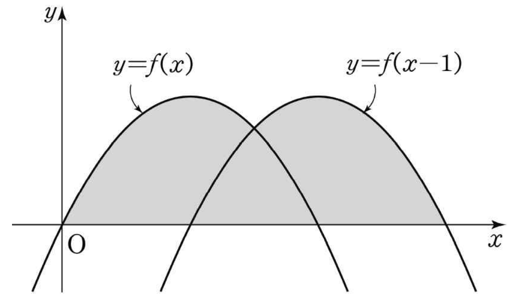
[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

92. 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$와 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?



① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

93. 함수 $f(x)=-x(x-2)$에 대하여 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는?



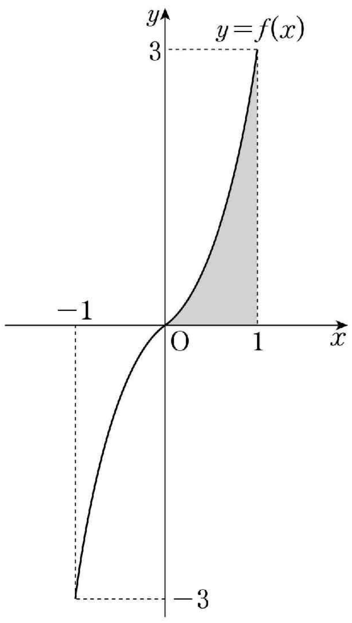
① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 30

94. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
> (나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.



04 수2 　 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

01 속도와 거리1 (위치, 위치조건)

95. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때, 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

① 참 　 ② 거짓

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

96. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2t+3, \quad v_2(t)=at(6-t)$$

이다. 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q가 만날 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

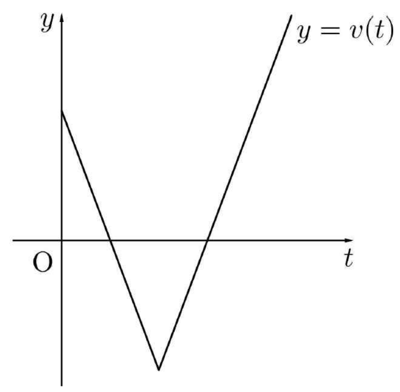
97. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도는

$$v(t)=|at-b|-4 \quad (a>0,\ b>4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k)-x(k)<8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k)-x(k)=8$이다.

시간 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



04 수2

09 정적분의 활용

03 속도와 거리

03 속도와 거리3 (이동거리)

98. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 6 - 2t$$

이다. 시각 $t = 1$과 $t = k$ $(k > 1)$에서 점 P의 위치가 같을 때, 점 P가 시각 $t = 1$에서 $t = k$까지 움직인 거리는?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

99. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t) = at(t-3)(t-6)$$

다음 물음에 답하시오. (단, $a > 0$)

(1) $0 \leq t \leq 6$에서 점 P가 원점에서 가장 멀리 있을 때의 거리가 $\frac{9}{2}$일 때, a의 값을 구하시오.

(2) $0 \leq t \leq 6$에서 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

100. 시각 $t = 0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 6t, \ v_2(t) = 2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t = a(a > 0)$에서 만날 때, 시각 $t = 0$에서 $t = a$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[유형별한글] [수학2] 사관학교 최근5개년(빠른 정답)

작업공간 2022.12.14

1. [정답] ④
2. [정답] ③
3. [정답] ①
4. [정답] ⑤
5. [정답] ②

6. [정답] ①
7. [정답] 18
8. [정답] ④
9. [정답] ⑤
10. [정답] 16

11. [정답] 10
12. [정답] 7
14. [정답] ①
15. [정답] ①

17. [정답] ⑤
18. [정답] ③
19. [정답] 34
20. [정답] ③

21. [정답] ⑤
22. [정답] ⑤
23. [정답] 28
24. [정답] ③
25. [정답] 30

26. [정답] ②
27. [정답] ②
28. [정답] ②
29. [정답] ②
30. [정답] ④

31. [정답] ①
32. [정답] ⑤
33. [정답] ②
34. [정답] ⑤
35. [정답] ⑤
36. [정답] ④
37. [정답] ④
38. [정답] ②
39. [정답] 45
40. [정답] ⑤

41. [정답] ④
42. [정답] ①
43. [정답] ②
44. [정답] ④
45. [정답] ③

46. [정답] 36
47. [정답] ⑤
48. [정답] 50
49. [정답] ③
50. [정답] 44

51. [정답] ①
52. [정답] ④
53. [정답] 6
54. [정답] ③
55. [정답] 9

56. [정답] ②
57. [정답] ③
58. [정답] 27
59. [정답] ⑤
60. [정답] 17

61. [정답] ②
62. [정답] ④
63. [정답] 21
64. [정답] ②
65. [정답] 11

66. [정답] 21
67. [정답] ②
68. [정답] ②
69. [정답] ①
70. [정답] 4

71. [정답] ⑤
72. [정답] ①
73. [정답] 50

74. [정답] ③
75. [정답] 65

76. [정답] 42
77. [정답] ⑤
78. [정답] 56
79. [정답] 80
80. [정답] 10

81. [정답] 30
82. [정답] ③
83. [정답] 17
84. [정답] ①
85. [정답] 38

86. [정답] 해설참조
87. [정답] ②
88. [정답] 31
89. [정답] 100
90. [정답] 32

91. [정답] 290
92. [정답] ②
93. [정답] ④
94. [정답] 41
95. [정답] ①

96. [정답] ①
97. [정답] 14
98. [정답] ①
99. [정답] (1) $\frac{2}{9}$ (2) 9
100. [정답] ②

[유형별한글] [수학2] 사관학교
최근5개년(해설)

작업공간 2022.12.14

1) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=2+2=4$

2) [정답] ③

[해설]

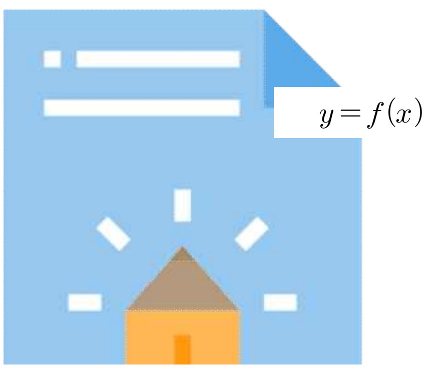
$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=2+(-1)=1$

3) [정답] ①

[해설]
정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

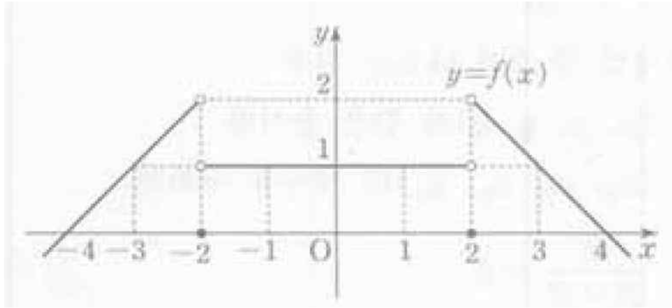
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore \lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=-1+(-2)=-3$

4) [정답] ⑤

[해설]
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\lim_{x\to a-} f(x)=1$을 만족시키는 정수 a의 개수는

$-3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 6이다.

5) [정답] ②

[해설]

$\lim_{x\to 1-} g(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)=-1$이어야 한다.

따라서 a의 값은 -1뿐이다.

6) [정답] ①

[해설]
(ⅰ) $\alpha=2$일 때,

$f(\alpha)=f(2)=5,\ \lim_{x\to \alpha+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(ax+b)=2a+b$

이므로 $5+(2a+b)=4$에서

$2a+b=-1$ …… ㉠

(ⅱ) $\alpha\neq 2$일 때,

$f(\alpha)=\lim_{x\to \alpha+} f(x)$이므로 $f(\alpha)=2$

$\alpha<2$일 때, $f(\alpha)=\alpha^2+1=2$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

$\alpha>2$일 때, $f(\alpha)=a\alpha+b=2$ …… ㉡

이상에서 $f(\alpha)+\lim_{x\to \alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이어야 하므로 $\alpha>2$일 때의 α의 값은 6이어야 한다.

$\alpha=6$을 ㉡에 대입하면 $6a+b=2$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{7}{4}$

7) [정답] 18

[해설]

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$ 의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$ 에서 $x\to0+$ 일 때, (분모)$\to0$ 이므로

(분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$

그러므로 $b=0$ 이고 $g(x)=x^2+ax$ …… ㉠

한편, $\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$ 에서 $x\to2+$ 일 때, (분모)$\to0$ 이므로

(분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to2+}g(x+1)=g(3)=0$

㉠에서 $3^2+3a=0$, $a=-3$

따라서 $g(x)=x^2-3x$ 이므로

$g(6)=6^2-18=18$

8) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x)}=-g(0)=1$, $g(0)=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x-1)=\lim_{x\to0-}f(x)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x-1)g(x)=g(1)=3$

$g(x)=x^2+ax+b$라 놓으면 $b=-1$, $1+a+b=3$이므로

$a=3$, $g(x)=x^2+3x-1$,

$\therefore\ g(2)=4+6-1=9$

9) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(x)>0$이면,

$g(x)=f(x)+|f(x)|$

$=f(x)+f(x)$

$=2f(x)$,

$f(x)=0$이면,

$g(x)=0+|0|$

$=0$,

$f(x)<0$이면,

$g(x)=f(x)+|f(x)|$

$=f(x)-f(x)$

$=0$

입니다. 따라서 $f(x)>0$인 구간에서 함수 $g(x)$는 $g(x)=2f(x)$이고, $g(x)>0$을 만족시킵니다.

또한 $f(x)\le0$인 구간에서 함수 $g(x)$는 상수함수 $g(x)=0$입니다.

이때 문제에 주어진 그래프에서 구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $g(x)>0$이므로 이 구간에서 $g(x)=2f(x)$임을 알 수 있습니다. 따라서

$\lim_{x\to1+}f(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to1+}g(x)$

$=\frac{1}{2}\times2$

$=1$ (참)

ㄴ. 문제에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 열린 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 이차함수의 그래프의 일부라고 하였으므로 이 이차함수를 $h(x)=ax^2+bx+c(a\ne0)$로 놓으면,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(-x)}{x^2}$

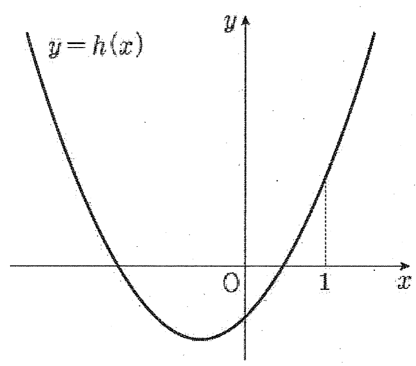
$=\lim_{x\to\infty}\frac{a(-x)^2+b(-x)+c}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)$

$=a$

한편 문제에 주어진 그래프에서 열린 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $g(x)=0$이므로, $x<1$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)\le0$을 만족시켜야 합니다. 즉, $x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le0$을 만족시켜야 하므로, 이때의 a의 값의 범위를 찾아봅시다.

우선 $a>0$이라고 가정하면, $\lim_{x\to-\infty}h(x)>0$이므로 열린 구간 $(-\infty,\ 1)$ 중에서 $h(x)>0$을 만족시키는 구간이 반드시 존재합니다.



즉, 열린 구간 $(-\infty,\ 1)$ 중에서 $f(x)>0$을 만족시키는 구간이 반드시 존재하므로, 문제에 주어진 그래프로부터 $a>0$이라는 가정이 거짓임을 알 수 있습니다.

따라서 $a<0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x)}{x^2}<0$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to 1+}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}f(x)=1$

입니다. 따라서 ㄷ에 주어진

$\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|f(x)|$

이 성립하기 위해서는 $\lim_{x\to 1-}|f(x)|=1$이어야 합니다.

이때

$\lim_{x\to 1-}|f(x)|=-\lim_{x\to 1-}f(x)$

$=-h(1)$

이므로

$h(1)=-1$ … ㉠

을 얻습니다.

한편 조건 (가)에서 주어진 $f(1)=f(0)+f(2)$에서

$f(1)=\frac{1}{2}g(1)=\frac{1}{2}$,

$f(2)=\frac{1}{2}g(2)=\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{1}{2}=f(0)+\frac{3}{2}$

에서 $f(0)=-1$을 얻습니다. 즉,

$h(0)=-1$ … ㉡

입니다. 따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키고 최고차항의 계수가 $a(a<0)$인 이차함수를

$h(x)=ax(x-1)-1$

로 놓을 수 있습니다.

이때 함수 $h(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는데, $x<1$인 모든 실수에 대하여 함수는 $h(x)$는 $h(x)\le 0$을 만족시켜야 하므로 $h\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$이어야 합니다. 즉,

$h\left(\frac{1}{2}\right)=a\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)-1$

$=-\frac{1}{4}a-1$

에서 $-\frac{1}{4}a-1\le 0$이므로, a의 값의 범위는 $a\ge -4$입니다. 이때 $h(-1)=a\times(-1)\times(-1-1)-1$

$=2a-1$

이므로 $h(-1)$의 값의 범위는 $h(-1)\ge -9$임을 알 수 있습니다. 따라서 $f(-1)\ge -9$ (참)

10) [정답] 16

[해설]

$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+a}{x-6}=b$이므로

$6^2-8\times 6+a=0,\ a=12,\ x^2-8x+a=(x-6)(x-2)$

$b=\lim_{x\to 6}(x-2)=4,$

$\therefore\ a+b=12+4=16$

11) [정답] 10

[해설]

연속이므로 $\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax-10}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+ax-10}{x-2}=f(2)=b$

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$=x^2+ax-10\to 2a-6=0$

$\therefore\ a=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}=7=b$

12) [정답] 7

[해설]

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$에서 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+a}{x-2}=b\cdots\cdots$ ①

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+a}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+a)=0$

즉, $4-10+a=0$이므로 $a=6$

$a=6$을 ①에 대입하면

$$b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-3)=-1$$

13)

14) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$에서

$g(x)=\begin{cases}(x+2)^2+a-1 & (x\le0)\\ x^2+a-1 & (x>0)\end{cases}$이다.

함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야한다.

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{x^2+a-1\}^2=(a-1)^2$

$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{(x+2)^2+a-1\}^2=(a+3)^2$

$\{g(0)\}^2=(a+3)^2$

따라서 $(a-1)^2=(a+3)^2$에서 $a=-1$

15) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\begin{cases}x^2-5a & (x<a)\\ -2x+4 & (x\ge a)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(-2a+4)$

$\lim_{x\to a-}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(a^2-5a)$

따라서 $a^2-5a=0$이거나 $-2a+4=a^2-5a$이므로

$a=4$ 또는 $a=5(\because a>0)$

따라서 모든 a의 값의 합은 9

16)

17) [정답] ⑤

[해설]

$x=1$일 때만 확인 하면 된다. $g(x)=(x-a)f(x)$에서

$g(1)=(1-a)\times4=\lim_{x\to1-}g(x)=(1-a)a$

$4(1-a)=a(1-a)$, $a=1$ 또는 4, $\therefore 1+4=5$

18) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g(x)$는 a의 값에

관계없이 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이 때 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체 집합에서 연속이므로

$g(-1)=0$에서

$g(-1)=k|-1-a|=0$

$\therefore a=-1(\because k\ne0)$

한편, $g(0)=f(-1)$에서

$k|0-a|=2$

$\therefore k=2(\because a=-1)$

따라서 $g(x)=2|x+1|$이므로

$g(2)=6$

19) [정답] **34**

[해설]

$f(x)=3x^3+ax+2$에서 $f'(x)=9x^2+a$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{5}$$

$=f'(2)\times\frac{1}{5}$

$=(36+a)\times\frac{1}{5}=8$

$36+a=40$에서 $a=4$

따라서 $f(x)=3x^3+4x+2$이므로

$f(2)=3\times2^3+4\times2+2=34$

20) [정답] ③

[해설]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

한편, $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$에서 $f'(2)=9$

$f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x+a$

그러므로 $f'(2)=3\times2^2-4\times2+a=a+4$
따라서 $a+4=9$에서 $a=5$

21) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{f(h)}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{f(0)}=1$$

$f'(2)=f(0)=6$이므로 $f'(x)=3x^2-8x+a$에서
$f'(2)=-4+a=6$
$\therefore a=10$

22) [정답] ⑤

[해설]

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=2$에서 $f(1)=3,\ f'(1)=2$

$g(x)=(x+2)f(x)$에서 $g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$\therefore g'(1)=f(1)+3f'(1)=3+6=9$

23) [정답] 28

[해설]

함수 $f(x)$가 다항함수이고, $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=4$이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$이고 $f'(2)=4$이다.

$g(x)=x^2f(x)$이므로

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\therefore\ g'(2)=2\cdot2f(2)+2^2f'(2)$
$=4\cdot3+4\cdot4$
$=28$

24) [정답] ③

[해설]

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$에서
$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고
극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-5\}=f(2)-5=0$에서
$f(2)=5$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-5}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)=3$$

따라서 $f(2)=5,\ f'(2)=3$이다.
$g(x)=(x^2+1)f(x)$에서
$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로
따라서 $g'(2)=4f(2)+5f'(2)=35$이다.

25) [정답] 30

[해설]

$f(0)=0$이고 주어진 극한의 식에서

$f(1)=1,\ f'(0)=f'(1)-1$

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$c=0,\ a+b+c=1,\ b=2a+b-1$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ f'(x)=x+\frac{1}{2},\ 60\times f'(0)=60\times\frac{1}{2}=30$

26) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$,
$\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{2f(1)-f(x)\}=f(1)$,
$g(1)=2f(1)-f(1)=f(1)$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$에서 극한값이
존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
$\lim\limits_{h\to0+}\{g(-1+h)+g(-1-h)-6\}=0$에서 $g(-1)=3$
$\therefore f(-1)=3$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\frac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}\right\}$$
$=g'(-1)-g'(-1)$
$=0$
$\therefore a=0$

또한, $g(1)=1$에서 $f(1)=1$

$f(x)=x^2+px+q$라 하면

$f(-1)=3$에서 $1-p+q=3$, $p-q=-2$ …… ㉠

$f(1)=1$에서 $1+p+q=1$, $p+q=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $p=-1$, $q=1$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$g(a)=g(0)=f(0)=1$ (참)

ㄷ. $b\neq1$이면 $\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=0$이므로 $b=1$이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}=4$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{h\to0+}\{g(1+h)+g(1-h)-6\}=0$에서

$g(1)=3$ $\therefore f(1)=3$

$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{2f(1)-f(1+h)+f(1-h)-6}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1-h)-f(1+h)}{h}$

$=-2f'(1)$

따라서 $-2f'(1)=4$에서 $f'(1)=-2$

$f(x)=x^2+rx+s$라 하면 $f'(x)=2x+r$

$f(1)=3$에서 $1+r+s=3$, $r+s=2$ …… ㉢

$f'(1)=-2$에서 $2+r=-2$, $r=-4$

$r=-4$를 ㉢에 대입하면 $s=6$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로

$g(4)=2f(1)-f(4)=6-6=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27) [정답] ②

[해설]

이차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}+\lim_{x\to2}\frac{f(x)+k}{x-2}=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+k}{x-2}$의 값이 모두 존재한다.

이차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-4\}=f(0)-4=0$

$\therefore$ $f(0)=4$ … ㉠

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+k}{x-2}$에서 $x\to2$일 때

(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)+k\}=f(2)+k=0$

$\therefore$ $f(2)=-k$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}+\lim_{x\to2}\frac{f(x)+k}{x-2}=0$에서

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}+\lim_{x\to2}\frac{f(x)+k}{x-2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(0)+f'(2)=0$ … ㉡

이제 $f(x)=x^2+px+q$(p, q는 실수)로 놓으면

$f'(x)=2x+p$이다.

㉠에서 $q=4$이고 ㉡에서

$p+(4+p)=0$

$\therefore$ $p=-2$

$\therefore$ $f(x)=x^2-2x+4$

$\therefore$ $k=-f(2)=-(2^2-2\times2+4)=-4$

28) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=a$에서 미분가능하다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$에서

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-2x)=a^2-2a$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(2x+b)=2a+b$

$f(a)=2a+b$

$\therefore a^2-2a=2a+b$, $b=a^2-4a$ …… ㉠

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하여야 한다.

$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{x^2-2x-(2a+b)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a-}\frac{x^2-2x-a(a-2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a-}\frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a}$

$=2a-2$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{2x+b-(2a+b)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{2(x-a)}{x-a}$$

$=2$

따라서 $2a-2=2$에서 $a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

이상에서 $a+b=-2$

29) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로 $x=b$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$에서

$b^2=4b+a$ …… ㉠

또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(b+h)^2-b^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{2bh+h^2}{h}$$

$=\lim_{h\to 0-}(2b+h)$

$=2b$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\{4(b+h)+a\}-\{4b+a\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{4h}{h}$$

$=4$

에서 $2b=4$ $\therefore$ $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-4$

$\therefore$ $a+b=-2$

30) [정답] ④

[해설]

$p(x)=x^3+x^2+x$, $q(x)=x^2+4x-2$라고 하면,

$p'(x)=3x^2+2x+1$, $q'(x)=2x+4$이다.

$x<k$일 때 $f'(x)-p'(x)$, $x>k$일 때 $f'(x)-q'(x)$이다.

따라서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)$의 값이 존재하면 된다.

$p(k)=q(k)$, $p'(k)=q'(k)$이다.

$p(k)=q(k)$에서 $k^3+k^2+k=k^2+4k-2$이다.

$k^3-3k+2=0$이므로, $(k-1)^2(k+2)=0$

따라서 $k=1$ 또는 $k=-2$이다. ……㉠

$p'(k)=q'(k)$에서 $3k^2+2k+1=2k+4$이다.

$3k^2-3=0$이므로, $3(k-1)(k+1)=0$

따라서 $k=1$ 또는 $k=-1$이다. ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $k=1$이다.

31) [정답] ①

[해설]

$y'=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$이므로 $x=1$, $y=6$일 때 기울기는 3으로 최대이다.

따라서 직선 l은 $y=3(x-1)+6=3x+3$

구하는 도형의 넓이는

$S=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$

32) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=-2x^3+3x+2$에서 $f'(x)=-6x^2+3$

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면 이때의 기울기는

$f'(a)=-6a^2+3$

$f'(a)$는 $a=0$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

따라서 기울기가 최대인 접선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선이므로

$g(x)=3x+2$ $\therefore$ $g(1)=3+2=5$

33) [정답] ②

[해설]

$y=x^3+3x^2+4x$을 미분하면

$y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1$이므로 접선의 기울기의 최솟값은 1이다. 따라서 ㄱ은 불가능하다.

$y'=4$로부터 $x=0$, -2이고 $x=0$일 때 $y=0$이므로 $x=0$에서 접선의 방정식은 $y=4x$이다. 따라서 ㄴ은

가능하다.

$y'=1$로부터 $x=-1$이고 $y=-2$이다. 따라서 $x=-1$에서 접선의 방정식은 $y=x-1$이므로 ㄷ은 불가능하다.

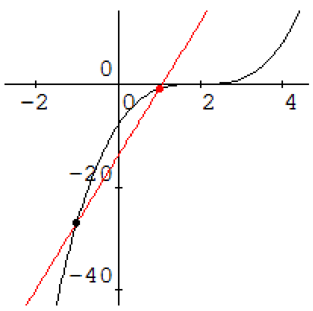
그러므로 가능한 접선은 오직 ㄴ.

34) [정답] ⑤

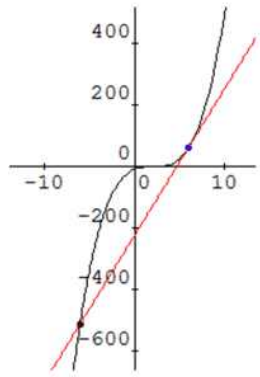
[해설]

ㄱ. $(-1,\ -27)$, $(1,\ -1)$으로부터 $m=\dfrac{(-1)-(-27)}{1-(-1)}=13$

ㄱ.



ㄴ.



ㄴ. $x=a$에서의 접선이 점 $(-a,\ (-a-2)^3)$을 지날 때이므로

$f'(x)=3(x-2)^2$에서 $m=f'(a)=3(a-2)^3$

$y=3(a-2)^2(x-a)+(a-2)^3$

점 $(-a,\ (-a-2)^3)$을 대입하면

$-(a+2)^3=-6a(a-2)^2+(a-2)^3$, $4a^3-24a^2=0$, $\therefore a=6$

ㄷ. $x=a$에서 접선은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이고,

$x=-a$에서 $y=f(a)-2af'(a)$이다.

$y=mx+n$에서는 $x=-a$이면 $y=n-ma$이다.

$f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키려면 ㄴ의 결과에서

$0<a<6$이므로 자연수 a의 개수는 5이다.

35) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=2x^3+2ax=2x(x^2+a)$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지기 위해서는 ㉠에서

$2x(x^2+a)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $a<0$

$x=a$에서 극소이므로

$f'(a)=2a(a^2+a)=2a^2(a+1)=0$

$a<0$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$f'(x)=2x(x^2-1)=2x(x+1)(x-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=b=7$

$\therefore a+b=6$

36) [정답] ④

[해설]

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+a$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값이 10이므로

$f(0)=a=10$

함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-2)=3\times(-2)^4+4\times(-2)^3-12\times(-2)^2+10=-22$

$f(1)=3+4-12+10=5$

이므로 모든 극솟값의 합은 $(-22)+5=-17$

37) [정답] ④

[해설]

(가)에 의하여 $(a,\ f(a))$는 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 $y=f(x)$의 교점이다.

$x=0$에서 변곡점이므로 1 : 2비율관계에 의해 $a=2$가 성립한다.

계속 증가해야 하므로 $(-1,\ 0)$을 변곡점에 대해 대칭시키면 $(1,\ 0)$이므로 (나)를 만족한다.

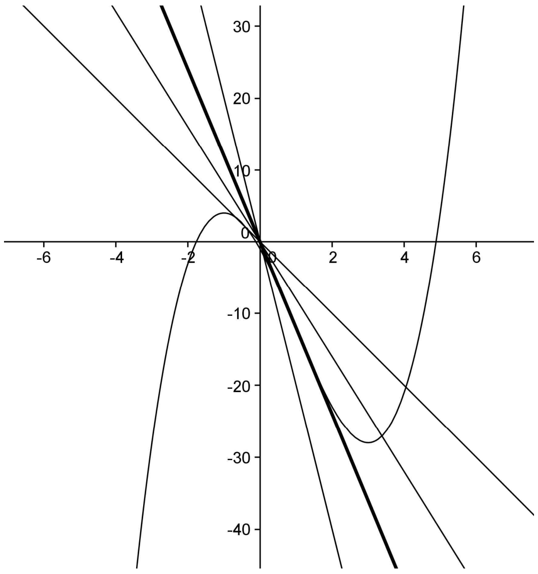
따라서 $(1,\ 0)$에서 $(2,\ 6)$으로 이동하므로 $m=1$, $n=6$이다.

38) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f(-1)=4,\ f(3)=-28,\ f(0)=-1$에서 그래프의 개형은 다음과 같다



이 때 원점을 지나는 직선 중에서 그림과 같이 $f(x)$의 변곡점을 지나고 변곡점에서의 접선의 기울기와 원점을 지나는 직선의 기울기가 같을 때 실수 전체의 집합에서 미분가능하게 된다

$f''(x)=6x-6=0,\ x=1$일 때 변곡이므로변곡점의 좌표는 $(1,-12)$

$\therefore$ 원점과 $(1,-12)$을 지나는 직선의 기울기는 -12

(변곡점에서의 미분계수 $f'(1)$ 또한 -12)

39) [정답] 45

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

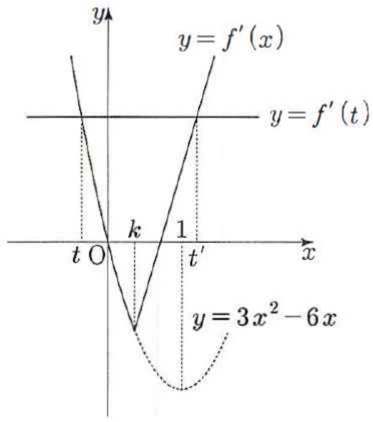
$g'(x)=f'(t)-f'(x)$에서 방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $f'(x)=f'(t)$를 만족시키는 x의 값이고, 이 방정식은 항상 $x=t$를 실근으로 갖는다.

한편, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & (x<k) \\ 2ax+b & (x>k) \end{cases}$$

이고 $3x^2-6x=3(x-1)^2-3$이므로 k의 값과 1의 대소비교에 따라 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $k\le 1$인 경우



$t\ne k$이면 그림과 같이 $f'(t)=f'(t')$인 실수 t'이 항상 존재하므로 방정식 $f'(x)=f'(t)$, 즉 $g'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖고 이때 함수 $g(x)$는 $x=t$와 $x=t'$에서 극값을 갖는다.

$t=k$이면 방정식 $f'(x)=f'(t)$의 실근은 $x=k$뿐이므로 이때 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

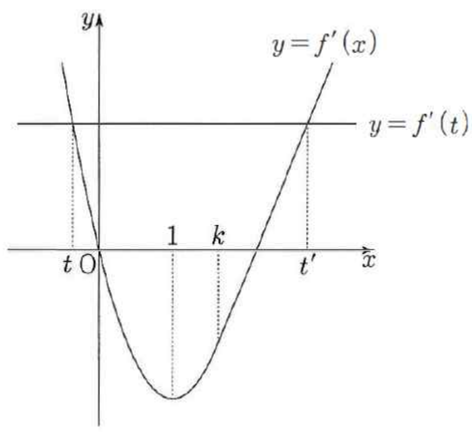
문제의 조건에 의해 $\frac{1}{3}k=k$이므로 $k=0$이다.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x<0) \\ ax^2+bx-9 & (x\ge 0) \end{cases}$$

는 $\lim_{x\to 0+}f(x)=-9,\ \lim_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 $x=0$에서 불연속이다.

즉, $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k>1$인 경우



$t\ne 1$이면 그림과 같이 $f'(t)=f'(t')$인 실수 t'이 항상 존재하므로 방정식 $f'(x)=f'(t)$, 즉 $g'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖고 이때 함수 $g(x)$는 $x=t$와 $x=t'$에서 극값을 갖는다.

$t=1$이면 방정식 $f'(x)=f'(t)$의 실근은 $x=1$뿐이므로 이때 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

문제의 조건에 의해 $\frac{1}{3}k=1$이므로 $k=3$이다.

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x<3) \\ ax^2+bx-9 & (x\ge 3) \end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & (x<3) \\ 2ax+b & (x>3) \end{cases}$$

가 $x=3$에서 미분가능하여야 하므로

$\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=f(3)$, $0=9a+3b-9$ … ㉠

$\lim_{x\to3+} f'(x)=\lim_{x\to3-} f'(x)$, $9=6a+b$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-3$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$, $b=-3$, $k=3$이므로 구하는 값은

$f(2k)=f(6)=72-18-9=45$

40) [정답] ⑤

[해설]

(가), (나)에서 $f(x)=x^4+bx^2+7$

$f(1)=1+b+7=2$, $b=-6$

그러므로 $f(x)=x^4-6x^2+7$

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

극솟값은 $x^2=3$일 때, $9-18+7=-2$

41) [정답] ④

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이라 하면 조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$

$2bx^2+2d=0$

$bx^2+d=0$

모든 실수 x에 대하여 이 등식이 성립하므로

$b=0$, $d=0$

조건 (나)에서 $f'(2)=0$, $f(2)=4$

$f(x)=ax^3+cx$에서 $f'(x)=3ax^2+c$이므로

$f'(2)=12a+c=0$ …… ㉠

$f(2)=8a+2c=4$에서 $4a+c=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$, $c=3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+3x$에서 $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$이므로

$f'(1)=-\frac{3}{4}+3=\frac{9}{4}$

42) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에 의해

$f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 정수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+b$

조건 (나)에서 $f(1)=a+b=5$ … ㉠

조건 (다)에서 $1<3a+b<7$

㉠에서 $b=5-a$이므로 $1<3a+(5-a)<7$

$-2<a<1$

따라서 정수 a는 -1($\because a\neq0$)

또한 $a+b=5$이므로 $b=6$이다.

$\therefore f(x)=-x^3+6x$

$f'(x)=-3x^2+6=0$에서

$x=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서

극솟값 $f(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$를 가지므로

$p=-\sqrt{2}$, $q=-4\sqrt{2}$

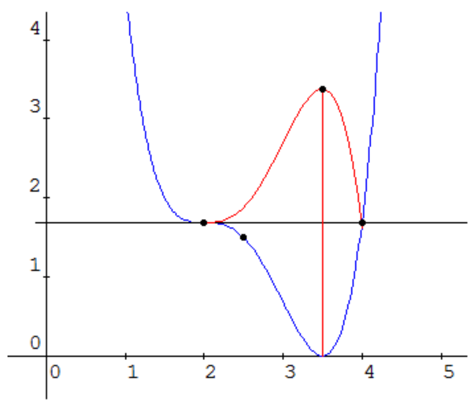
$\therefore p\times q=8$

43) [정답] ②

[해설]

$y=2a-f(x)$는 $y=f(x)$을

$y=a$에 대하여 대칭이동한 것이다.



(가)에서 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-4)+a$

(나)에서 $f'(x)=(x-\alpha)^2(4x-14)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)=0$

두 식으로부터 $\alpha=2$, $a=\frac{27}{16}$이다.

$\therefore f(x)=(x-2)^3(x-4)+\frac{27}{16}$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

44) [정답] ④

[해설]

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x \geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 연속함수이다.

조건 (가)에서 $f(1)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-2x+1)(x^2+ax+b)$

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)$
$=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x+2b-a\}$

조건 (나)에서 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않으며 $k \neq 0$이므로 함수 $|g(x)-3|$은 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|g(x)-3|$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f'(0)=-2b+a=0$에서

$a=2b$

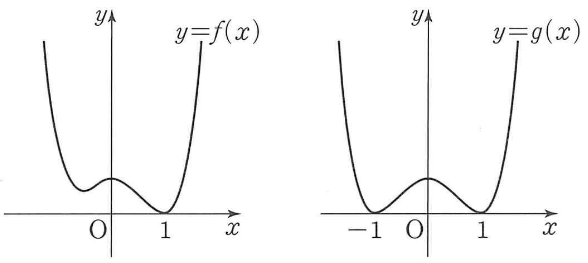
그러므로

$f'(x)=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x\}$
$=4x(x-1)\left(x-\dfrac{2-3a}{4}\right)$

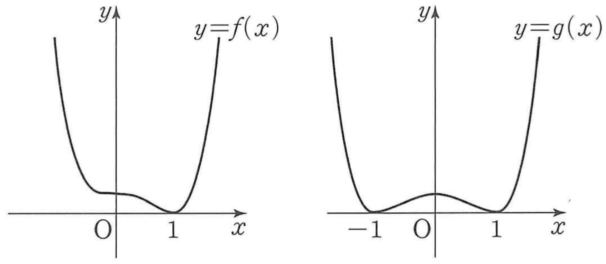
조건 (다)에서 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 항상 증가하거나 항상 감소한다. 즉, 극값을 갖지 않는다.

따라서 $\dfrac{2-3a}{4} \leq 0$ 또는 $\dfrac{2-3a}{4} \geq 1$

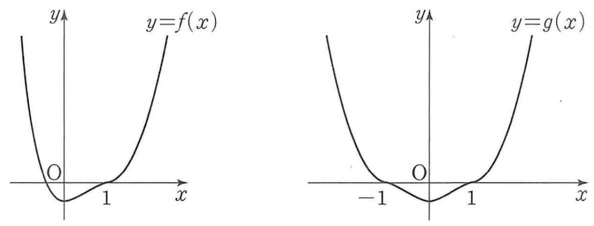
(ⅰ) $a>\dfrac{2}{3}$일 때



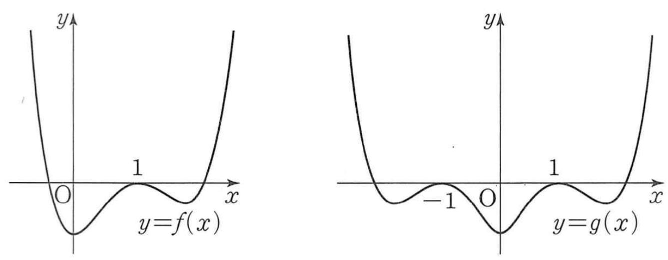
(ⅱ) $a=\dfrac{2}{3}$일 때



(ⅲ) $a=-\dfrac{2}{3}$일 때



(ⅳ) $a<-\dfrac{2}{3}$일 때



ㄱ. $f(0)>0$이면 (ⅰ), (ⅱ)의 경우로 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. (ⅲ)의 경우 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건 (나)를 항상 만족시키려면 $f(0)=b \leq 3$
따라서 $f(2)=4+2a+b=4+4b+b=5b+4 \leq 19$로 $f(2)$의 최댓값은 19이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

45) [정답] ③

[해설]

$y=xf(x)$는 사차함수이고, $y=|xf(x)|$가 x축과 두 점에서 만나면서 미분가능한 경우는 $y=xf(x)$가 x축과 두 점에서 접하는 경우뿐이므로,

$xf(x)=x^2(x-a)^2$

$f(x)=x(x-a)^2$

$f'(x)=(x-a)(3x-a)$

따라서, $f(x)$는 $x=a$, $\frac{a}{3}$에서 극값을 갖고 $f(a)=0$이므로

$x=\frac{a}{3}$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 가져야만 한다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}\times\frac{4a^2}{9}=\frac{4}{27}a^3=\frac{1}{2}$$

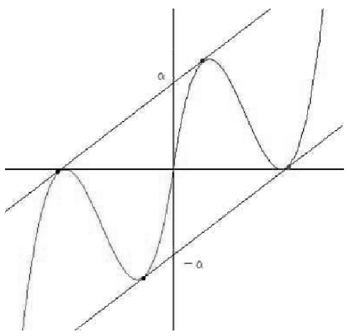
$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ f(3)=3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$$

46) [정답] 36

[해설]

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$x>0$일 때,

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인 점을 $x=b$, $c(b<c)$라 하면

$b+c=\frac{4a}{3}$, $bc=\frac{a^2-4}{3}$

$$\frac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$$

이것을 풀면

$$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc=\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}$$

$$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c)=\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a$$

$$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$$

즉, $\left(\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a\right)-2a\left(\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{3}a^3=\frac{16}{3}a$

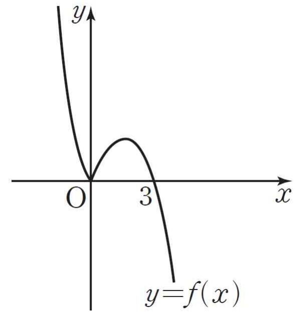
$$\therefore\ f'(0)=a^2=36$$

47) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=-x^3+9|x|=\begin{cases}-x^3-9x & (x<0)\\ -x^3+9x & (x\geq 0)\end{cases}$$

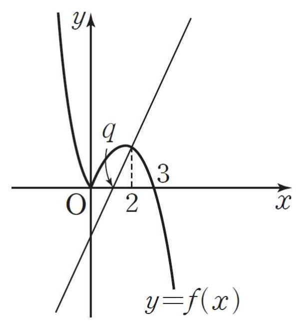
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$2\in(A\cap B)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 좌극한과 우극한이 같지만 $t=2$에서 불연속이다.

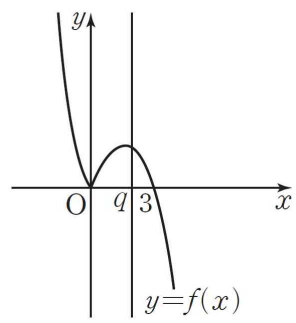
점 Q(q, 0)의 x좌표에 따라 함수 $g(t)$의 $t=2$에서의 연속성을 살펴보자.

(ⅰ) $0<q<2$인 경우



$\lim_{t\to 2+}g(t)=\lim_{t\to 2-}g(t)=g(2)=1$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 연속이다. 즉, $2\notin B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

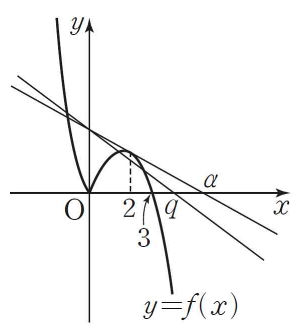
(ⅱ) $q=2$인 경우



$\lim_{t\to 2+}g(t)=1$, $\lim_{t\to 2-}g(t)=3$에서 $2\notin A$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이제 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 x절편을 α라 하자.

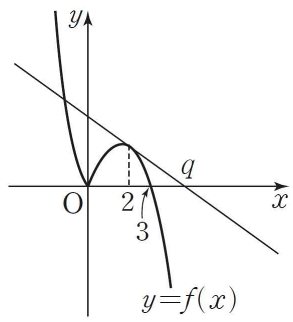
(ⅲ) $2<q<\alpha$인 경우



$\lim_{t\to 2+}g(t)=\lim_{t\to 2-}g(t)=g(2)=3$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$

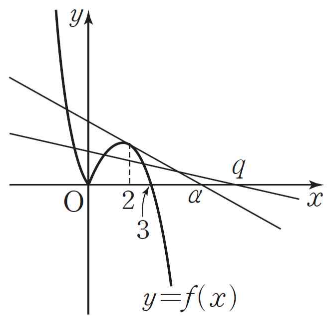
에서
연속이다. 즉, $2 \notin B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $q=\alpha$인 경우



$\lim_{t\to 2-} g(t)=\lim_{t\to 2+} g(t)=3$, $g(2)=2$이므로 $2\in(A\cap B)$이다.

(v) $q>\alpha$인 경우



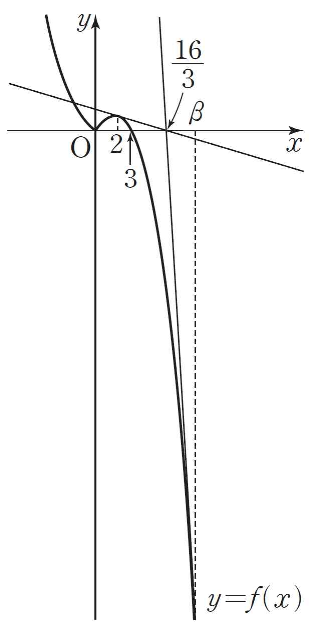
$\lim_{t\to 2+} g(t)=\lim_{t\to 2-} g(t)=g(2)=3$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서
연속이다. 즉, $2 \notin B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

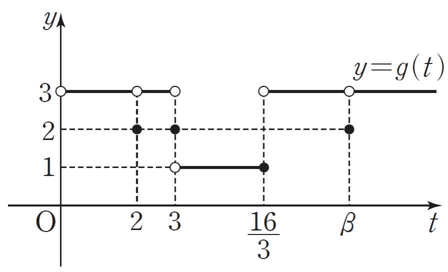
(i)~(v)에서 $2\in(A\cap B)$이려면 반드시 $q=\alpha$이어야 한다.
α의 값을 구하기 위해 곡선 $y=f(x)$ 위의 점
$(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식을 구하면 $x>0$에서
$f'(x)=-3x^2+9$이므로

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-3(x-2)+10=-3x+16$

즉, $q=\alpha=\frac{16}{3}$이고 $\mathrm{Q}\left(\frac{16}{3},\ 0\right)$이다.



이때 그림과 같이 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{16}{3},\ 0\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그었을 때 점 $(2,\ f(2))$가 아닌 접점을 $(\beta,\ f(\beta))$라 하면 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 집합 B는 함수 $g(t)$가 연속이 아닌 점의 t좌표 중 양수인 것의 집합이므로 $B=\left\{2,\ 3,\ \frac{16}{3},\ \beta\right\}$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$
$\quad=\left(-3\beta^2+9\right)(x-\beta)-\beta^3+9\beta$
$\quad=\left(-3\beta^2+9\right)x+2\beta^3$

이 접선이 점 $\left(\frac{16}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$0=-16\beta^2+48+2\beta^3$

$\beta^3-8\beta^2+24=0$

$(\beta-2)(\beta^2-6\beta-12)=0$

$\beta>0$이고 $\beta\neq 2$이므로 $\beta=3+\sqrt{21}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+\frac{16}{3}+\left(3+\sqrt{21}\right)=\frac{40}{3}+\sqrt{21}$

48) [정답] **50**

[해설]

$g(0)=2$이므로 방정식 $|f(x)|=0$의 실근은 2개다.

즉, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 2개이므로 $f(x)=0$의 실근은 α,β라 하고 이 중 중근을 β라 하자.

즉, $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$

$\quad f'(x)=(x-\beta)^2+2(x-\alpha)(x-\beta)$
$=(x-\beta)(3x-2\alpha-\beta)$

$f'(x)=0$의 실근은 β 또는 $\frac{2\alpha+\beta}{3}$

$f'(1)=0$이므로 $\beta=1$ 이거나 $\frac{2\alpha+\beta}{3}=1$

$\beta=1$인 경우 $f(1)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지

않는다.

즉, $\dfrac{2\alpha+\beta}{3}=1$에서 $2\alpha+\beta=3$이므로

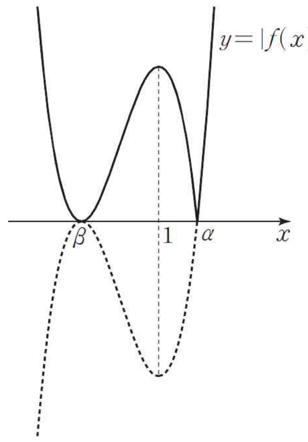
$$\beta=3-2\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$에 ㉠을 대입하면

$$f(x)=(x-\alpha)(x-3-2\alpha)^2$$

$g(0)=2$, $g(4)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\alpha>\beta$인 경우와 $\alpha<\beta$인 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $\alpha>\beta$인 경우



$$f(1)=-4$$

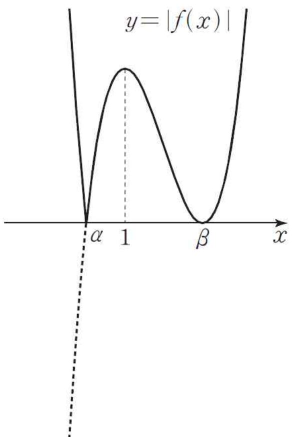
$f(1)=(1-\alpha)(1-3-2\alpha)^2=4(1-\alpha)^3=-4$에서 $\alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면 $\beta=-1$

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$이므로

$$f(4)=5^2\times 2=50$$

(ii) $\alpha<\beta$인 경우



$$f(1)=4$$

$f(1)=(1-\alpha)(1-3-2\alpha)^2=4(1-\alpha)^3=4$에서 $\alpha=0$

$\alpha=0$를 ㉠에 대입하면 $\beta=3$

따라서 $f(x)=x(x-3)^2$이므로 $f(4)=4\times 1^2=4$

(i), (ii)에서 $f(4)$의 최댓값은 50이다.

49) [정답] ③

[해설]

$y=x^3-6x^2+5$의 양변을 미분하면

$$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$$

즉, $y'=0$에서 $x=0$, $x=4$이므로

$x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소를 갖는다.

주어진 범위가 $-1\le x\le 1$이므로 $x=0$일 때, 최댓값 5, $x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

즉, $y=x^2-4x+a\,(1<x\le 3)$은 $x=2$에서 대칭이고 최솟값을 갖는다.

즉, 최댓값이 5이므로 최솟값은 -5이어야 한다.

따라서 $a-4=-5$

$$\therefore \lim_{x\to 1+}f(x)=a-3=-4$$

50) [정답] 44

[해설]

삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$이므로

$f(x)=ax^3+bx\,(a,\ b$는 상수$)$이다.

또한, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$g'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{2x-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

이고, $f(0)=0$이므로 $2=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{ax^3+bx}{x}=b$이다.

즉, $f(x)=ax^3+2x$, $f'(x)=3ax^2+2$이다.

ⅰ) $a>0$인 경우

$x\ge 0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 즉, 최댓값을 갖지 않으므로 이 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

ⅱ) $a<0$인 경우

$x\ge 0$일 때 방정식 $f'(x)=0$의 근은 $3ax^2+2=0$에서

$x=\sqrt{-\dfrac{2}{3a}}$이고 $x<0$에서 최댓값을 갖지 않으므로 함수

$g(x)$는 $x=\sqrt{-\dfrac{2}{3a}}$에서 극대이면서 최대가 된다. 즉,

$$f\left(\sqrt{-\frac{2}{3a}}\right)=a\times\left(-\frac{2}{3a}\sqrt{-\frac{2}{3a}}\right)+2\sqrt{-\frac{2}{3a}}$$

$$=\frac{4}{3}\times\sqrt{-\frac{2}{3a}}=\frac{4}{9}$$

에서 $a=-6$이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $f(x)=-6x^3+2x$이므로 $f(-2)=44$이다.

51) [정답] ①

[해설]

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(-2)=f(2)=16$이고 $f'(-2)=f'(2)=0$이다.

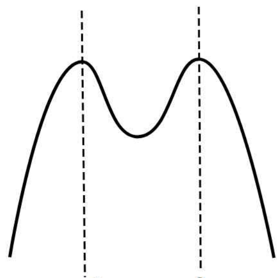
구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 실숫값을 갖는 함수 $f(x)$가 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

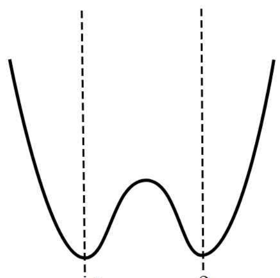
닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 연속이다.

$\Downarrow$

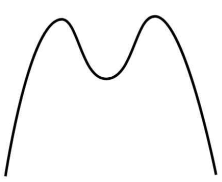
지문 함수 $f(x)$가 상수함수가 아니라면 $f(a),\ f(b)$와 다른 최댓값, 최솟값을 구간 $(-2,\ 2)$에서 갖는다.

가능한 사차함수의 그래프의 개형은





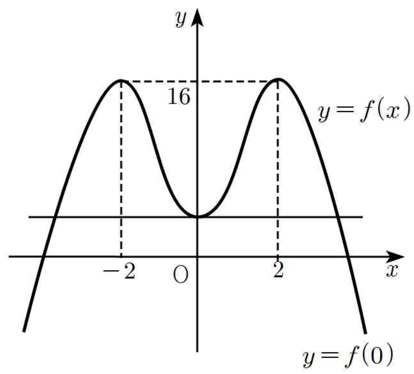
$f'(-2)=f'(2)=0$을 만족할 수 있는 두 그래프 중 구간 $[-2,\ 2]$에서 16보다 작은 최솟값이 존재하는


이 그래프이다.

ㄱ. $f(x)=a(x+2)^2(x-2)^2+16$(a는 상수)이므로

$f'(x)=2a(x+2)(x-2)^2+2a(x+2)^2(x-2)$이다.

$g'(0)=f'(0)=16a-16a=0$ $\Rightarrow$ 참

ㄴ.


$\Rightarrow$ 거짓

ㄷ. $g(0)=0$인 경우이므로

$f(0)=a\cdot 4\cdot 4+16=0,\ a=-1$이다.

$g(1)=f(1)=-1\cdot 3^2\cdot(-1)^2+16=7$이다. $\Rightarrow$ 거짓

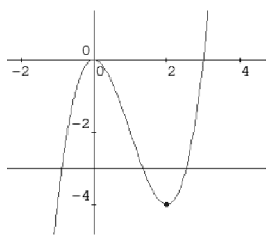
52) [정답] ④

[해설]

$n(x^3-3x^2)+k=0$

$x^3-3x^2=-\dfrac{k}{n}$

$y=x^3-3x^2$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $-4<-\dfrac{k}{n}<0$

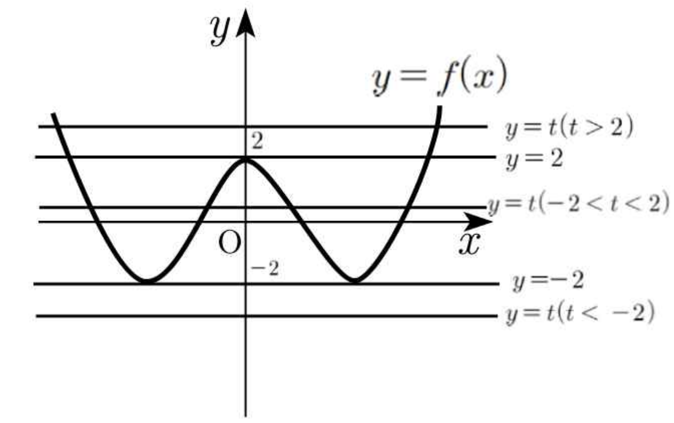
$0<k<4n,\ a_n=4n-1$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times 55-10=210$

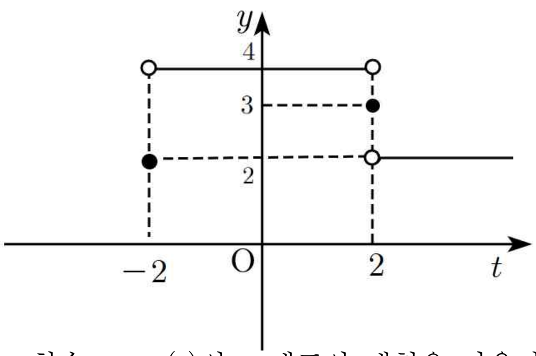
53) [정답] **6**

[해설]

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.



t의 값에 따른 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 다음과 같다.



함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

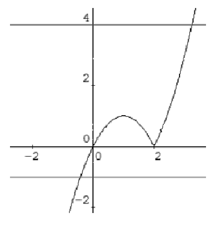
$\therefore g(-2)+\lim\limits_{t\to 2-} g(t)=2+4=6$

54) [정답] ③

[해설]

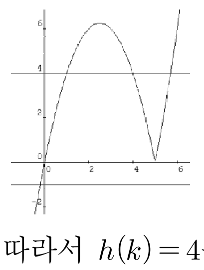
$(g\circ f)(x)=(f(x))^2-3(f(x))-4=(f(x)+1)(f(x)-4)=0$
이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 실근은 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=4$이다.

ㄱ. $k=2$일 때 $f(x)=x|x-2|$의 그래프는 그림과 같다.



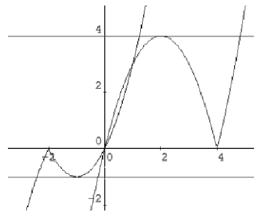
따라서 $h(2)=2$이다.

ㄴ. $k=5$일 때 $f(x)=x|x-5|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

ㄷ. $k=-2$, $k=4$일 때, $f(x)=x|x-k|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=3$을 만족시키는 k의 값의 합은 $(-2)+4=2$이다.

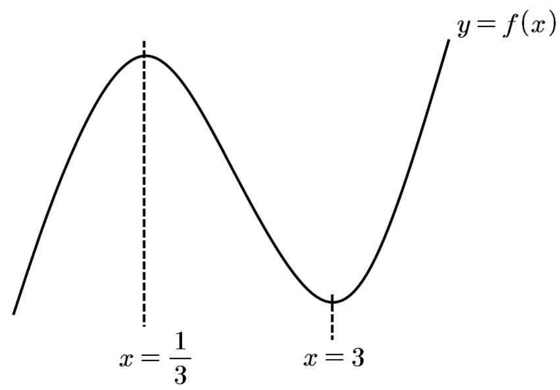
55) [정답] 9

[해설]

$f(x)=x^3-5x^2+3x+n$이라 하자.

$f'(x)=3x^2-10x+3=0$에서 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$, $f'(3)=0$

즉, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 $f(0)=n$, $f(3)=n-9$이므로 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 최솟값은 $n-9$

따라서 $n-9\ge 0$이므로 자연수 n의 최솟값은 9

56) [정답] ②

[해설]

$2x^3-3x\ge 3x+a$에서

$2x^3-6x\ge a$

$f(x)=2x^3-6x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-4	↗

즉, $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$2x^3-6x \ge a$를 만족시키는 실수 a값의 범위는 $a \le -4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다.

57) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+a$라 하면

$$f'(x)=3x^2-9x=3x(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=3$에서 극소이면서 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 $x=3$일 때 최소이다.

한편, $f(1)=-\frac{7}{2}+a$, $f(4)=-8+a$에서 $f(1) \ge f(4)$이므로

$x=1$일 때 최대이다.

그런데 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$f(1)=-\frac{7}{2}+a \le 0$이므로 $a \le \frac{7}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

58) [정답] 27

[해설]

$f(x)=\int(4x^3+4x+1)dx$

$=x^4+2x^2+x+C$(단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$

$f(2)=16+8+2+1=27$

59) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=4x^3+ax$에서 $f(x)=x^4+\frac{a}{2}x^2+C$

$f(0)=-2$이므로 $f(0)=C=-2$ …… ㉠

$f(1)=1$에서 $f(1)=1+\frac{a}{2}+C=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $C=-2$, $a=4$

$$f(2)=16+2\times2^2-2=22$$

60) [정답] 17

[해설]

$$f(x)=\int(3x^2+6x-4)dx$$

$=x^3+3x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$$f(1)=1+3-4+C=5,\ C=5$$

$$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$$

따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

61) [정답] ②

[해설]

조건 (나)에서 $f'(x)=ax(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면

조건 (가)에서 $f'(4)=-24$이므로

$f'(4)=12a=-24$에서 $a=-2$

따라서 $f'(x)=-2x(x-1)(x-3)=-2x^3+8x^2-6x$이므로

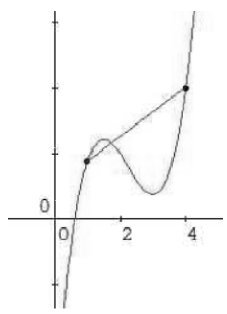
$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3-3x^2+2$ $(\because f(0)=2)$

$\therefore f(2)=\frac{10}{3}$

62) [정답] ④

[해설]

그래프가 그림과 같아야 한다.



$1 \le k$, $f(1)<f(4)$

$f'(x)=3(x-k)(x-2k)$

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}kx^2+6k^2x+C$

$$f(4)-f(1)=(64-72k+24k^2)-\left(1-\frac{9}{2}k+6k^2\right)$$

$$=18k^2-\frac{135}{2}k+63$$

$$=\frac{9}{2}(4k^2-15k+14)$$

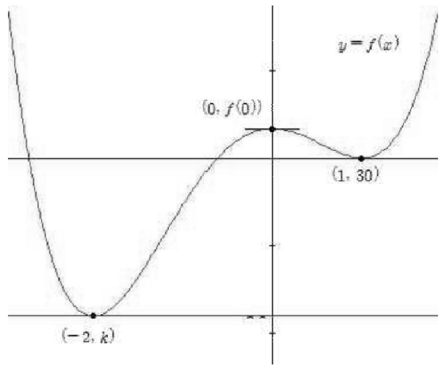
$$=\frac{9}{2}(k-2)(4k-7)>0$$

$\therefore\ 1 \le k<\frac{7}{4}$, $\beta-\alpha=\frac{3}{4}$

63) [정답] 21

[해설]

주어진 조건으로부터 $y=f(x)$는 그림과 같이 $x=-2$, $x=1$일 때 각각 극솟값 $f(-2)=k$, $f(1)=30$을 갖는다. 또한 $f'(0)=0$이다.



따라서 $f'(x)=4x(x+2)(x-1)=4x^3+4x^2-8x$

$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+C$

$f(1)=1+\frac{4}{3}-4+C=30,\quad C=\frac{95}{3}$

$\therefore\quad f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{95}{3}$

$k=f(-2)=16-\frac{32}{3}-16+\frac{95}{3}=21$

64) [정답] ②

[해설]

ㄱ. 조건 (가), (나)에서 $g(x)=xf(x)$이고 $g(x)\geq 0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)\geq 0$, $x<0$일 때 $f(x)\leq 0$이다. 이를 만족하려면 $f(0)=0$이어야 하므로 참이다.

ㄴ. $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

라 하면 $g(x)=x^2(x^2+ax+b)$이므로

$f(x)-g(x)=(x-x^2)(x^2+ax+b)$

$\qquad=x(1-x)(x^2+ax+b)$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$는 $x=0$, 1을 근으로 가지므로 참이다.

ㄷ. $x<0$일 때 $f(x)\leq 0\leq g(x)$

$0\leq x<1$일 때 $x>x^2$이고 $x^2+ax+b\geq 0$이므로

$g(x)\leq f(x)$

$x\geq 1$일 때 $x^2\geq x$이고 $x^2+ax+b\geq 0$이므로

$f(x)\leq g(x)$

이므로 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ g(x) & (0\leq x<1) \\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 1-}h'(x)=\lim_{x\to 1+}h'(x)$,

$4+3a+2b=3+2a+b$, $b=-a-1$

또한, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b\geq 0$이 성립해야 하므로

방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b\leq 0$, $a^2-4(-a-1)\leq 0$, $(a+2)^2\leq 0$

$\therefore\ a=-2$, $b=1$

즉, $f(x)=x(x^2-2x+1)$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_1^2(x^3-2x^2+x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{2}{3}$

따라서 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

65) [정답] 11

[해설]

조건 (가)에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점을 구하면

$f(x)=f(x)+|f(x)-1|$

$\therefore f(x)=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서 ㉠을 만족하는 서로 다른 실근의 합이 3이다.

문제에서 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이므로 ㉠은 $x=1$을 중근으로 가지므로 다른 한 근은 2이다.

$\therefore f(x)=a(x-1)^2(x-2)+1$

조건 (나)에서

$0<\int_0^n g(x)\,dx-n<16$, 즉

$0<\int_0^n\{g(x)-1\}\,dx<16$ $\cdots\cdots$ ㉠

을 만족해야 한다.

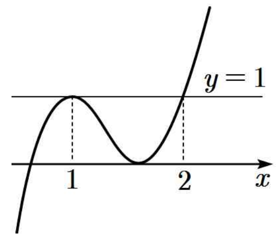
$g(x)=\begin{cases}2f(x)-1 & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$에서

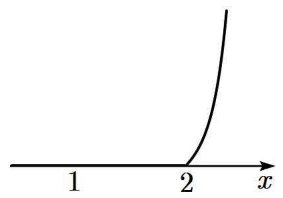
$g(x)-1=\begin{cases}2f(x)-2 & (f(x)\geq 1) \\ 0 & (f(x)<1)\end{cases}$

$\qquad=\begin{cases}2a(x-1)^2(x-2) & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$

함수 $g(x)-1$의 그래프의 개형은 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 다음 두 가지가 가능하다.

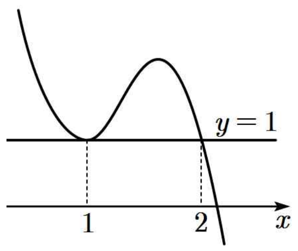
(ⅰ) $a>0$일 때

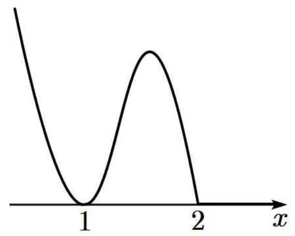




$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)-1$

(ii) $a<0$일 때





$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)-1$

(i)의 경우는 $n=1$일 때, $\int_0^n \{g(x)-1\}\,dx=0$이므로 ㉠을 만족하지 않는다.

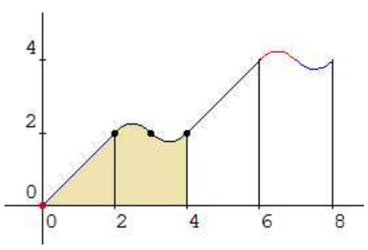
(ii)에서 ㉠을 만족하기 위해서는 $n=2$일 때만 만족하면 되므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{g(x)-1\}\,dx &= \int_0^2 2a(x-1)^2(x-2)\,dx \\ &= 2a\int_0^2 \{(x-1)^3-(x-1)^2\}\,dx \\ &= 2a\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2 \\ &= -\frac{4}{3}a\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서 $0<-\frac{4}{3}a<16$, $-12<a<0$이므로 정수 a는 11개이고, 함수 $f(x)$의 개수도 11개다.

66) [정답] 21

[해설]



그림과 같은 모양이어야 한다.

$f(x)=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+b$ 라 하면

$f'(x)=2a\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$f'(2)=2a\left(2-\frac{5}{2}\right)=-a=1$

$f(2)=a\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+b=2$, $b=\frac{9}{4}$

즉 $f(x)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$, $g(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

그리고 $k=2$이다.

$h\left(\frac{13}{2}\right)=h\left(\frac{5}{2}\right)+2=f\left(\frac{5}{2}\right)+2=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$, $\therefore 4+17=21$

67) [정답] ②

[해설]

$\int_0^1 f(x)dx=a$라 하면, $f(x)=\frac{3}{4}x^2+a^2$

$a=\int_0^1\left(\frac{3}{4}x^2+a^2\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^3+a^2x\right]_0^1=a^2+\frac{1}{4}$

$a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=0$, $a=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^2=\frac{5}{2}$

68) [정답] ②

[해설]

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+(2x-2)k=3x^2+2kx-2k$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (3x^2+2kx-2k)\,dx \\ &= \left[x^3+kx^2-2kx\right]_0^1 \\ &= 1+k-2k \\ &= 1-k\end{aligned}$$

이때 $1-k=k$이므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=3x^2+x-1$이므로 $f(0)=-1$

69) [정답] ①

[해설]

$\int_0^2 tf(t)dt=k$라 하면

$f(x)=-x^2+5x+4k$

$k=\int_0^2 t(-t^2+5t+4k)dt$

$=\int_0^2 (-t^3+5t^2+4kt)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3+2kt^2\right]_0^2$

$=8k+\frac{28}{3}$

따라서 $k=-\frac{4}{3}$이다.

따라서 $f(x)=-x^2+5x-\frac{16}{3}$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{11}{12}$이다.

70) [정답] 4

[해설]
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2-4ax$
$\int_1^1 f(t)\,dt=1-2a+a=1-a=0$이므로 $a=1$
즉, $f(x)=3x^2-4x$이므로 $f(2)=12-8=4$

71) [정답] ⑤

[해설]
$x=1$을 대입하면 $0=1+a-3$, $a=2$
미분하면 $f(x)=3x^2+a=3x^2+2$
$\therefore\ f(a)=f(2)=12+2=14$

72) [정답] ①

[해설]

$\int_2^x f(t)\,dt=ax+4+\int_1^x (3t^2-2t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2a+4+\int_1^2 (3t^2-2t)\,dt$

$=2a+4+\left[t^3-t^2\right]_1^2$

$=2a+4+\{(8-4)-(1-1)\}$

$=2a+8$

이므로 $a=-4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a+3x^2-2x=3x^2-2x-4$

따라서

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 (3x^2-2x-4)\,dx$

$=\left[x^3-x^2-4x\right]_0^3=27-9-12=6$

73) [정답] 50

[해설]

등식을 만족시키는 다항식 $f(x)$는 일차식이다.

$f(x)=cx+d$라 하면

$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$

미분하면 $2\int_1^x f(t)dt+(2x-1)f(x)=3x^2+a$

또 미분하면 $2f(x)+2f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$

$4f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$

$4cx+4d+c(2x-1)=6x$, $6cx+4d-c=6x$

$\therefore c=1$, $d=\frac{1}{4}$, $f(x)=x+\frac{1}{4}$, $40\times f(1)=40\times\frac{5}{4}=50$

74) [정답] ③

[해설]

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^4-x^3+ax^2-bx+1$ …… ①

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4-x^3+ax^2-bx+1$

위 식의 양변을 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-3x^2+2ax-b$

$\int_1^x f(t)dt=4x^3-3x^2+2ax-b$ …… ②

①, ②에서 $x=1$일 때 좌변이 모두 0이므로

$a-b+1=0$, $1+2a-b=0$

두 식을 연립하면 $a=0,\ b=1$

또한, ②식의 양변을 미분하면 $f(x)=12x^2-6x(\because\ a=0)$

따라서 $f(1)=12-6=6$

75) [정답] 65

[해설]

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x (t^3+at^2+bt)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=\int_0^1 (t^3+at^2+bt)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$

에서 $4a+6b+3=0$ ⋯⋯ ㉡

또, ㉠에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=\int_0^x (t^3+at^2+bt)dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3+ax^2+bx$$

$$\int_1^x f(t)dt=x^3+ax^2+bx \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=1+a+b \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2+2ax+b$$

$$=3x^2-3x+\frac{1}{2}$$

따라서

$$f(b-a)=f\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=f(2)$$

$$=12-6+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{13}{2}$$

이므로

$$10f(b-a)=10\times\frac{13}{2}$$

$$=65$$

76) [정답] 42

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 놓자.

(가)에서 $f(-2)=12,\ -8a+4b-2c+d=12$

(나)를 계산하면 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때

$t\to 0+$이고 $xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{t}f(t)$이다.

$$\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(x+1)}{x}=1$$

이므로 $f(0)=0,\ f(1)=0,\ f'(0)+f'(1)=1$이다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f(0)=d=0,\ f(1)=a+b+c+d=0$

$f'(0)+f'(1)=c+(3a+2b+c)=1$

이상을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=0$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-4x,$

$\therefore\ f(3)=27+27-12=42$

77) [정답] ⑤

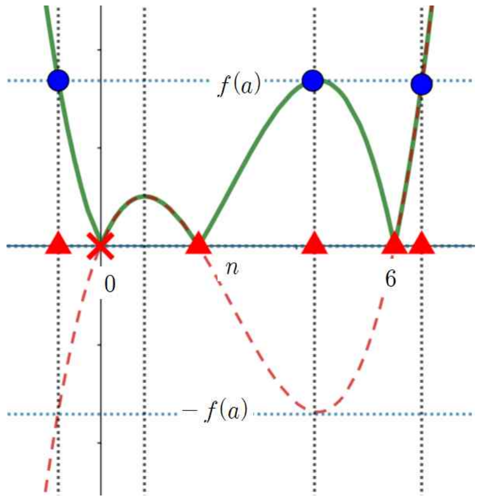
[해설]

$$f(x)=\int_0^x \{3t^2-2(n+6)t+6n\}dt=3x^3-(n+6)x+6nx$$

$$f(x)=3x(x-n)(x-6)$$

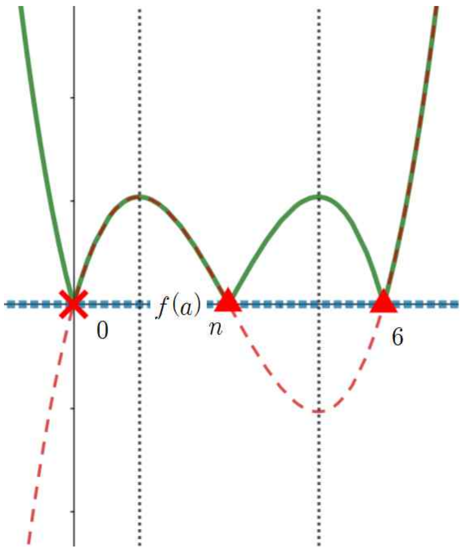
방정식 $|f(x)|=|f(a)|$의 해의 개수는 다음과 같이 6가지 경우로 나뉜다.

1) $n=1,\ 2$일 때,



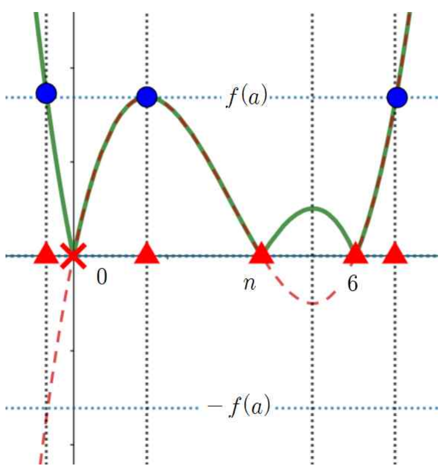
$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 5개이다.

2) $n=3$일 때,



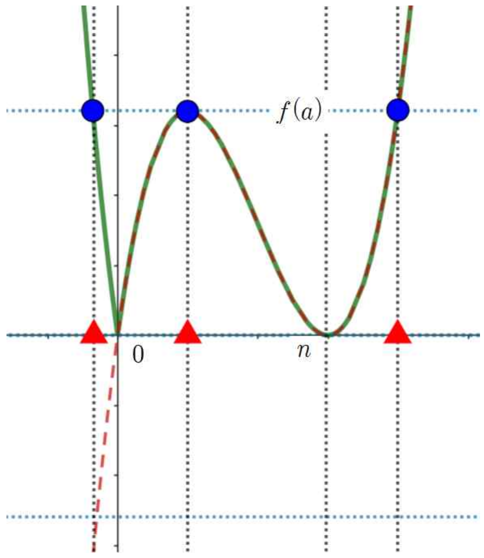
$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 2개이다.

3) $n=4,\ 5$일 때,



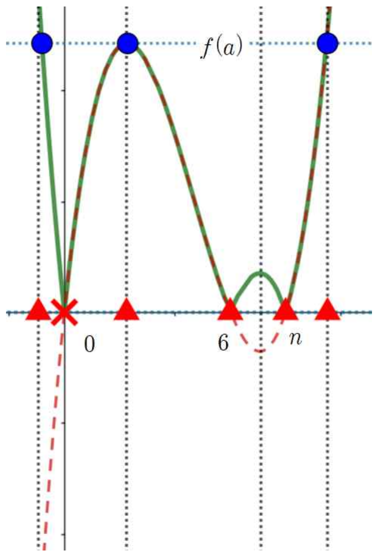
$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 5개이다.

4) $n=6$일 때,



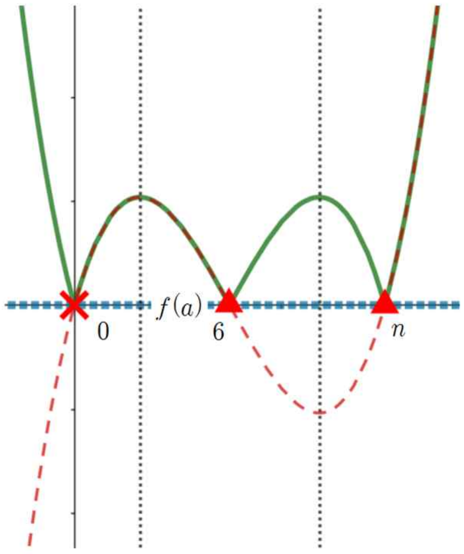
$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 3개이다.

5) $n=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$일 때,



$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 5개이다.

6) $n=12$일 때,



$|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 a의 개수는 2개이다.

그러므로,

$$\sum_{n=1}^{12} g(n)=(2\times5)+2+(2\times5)+3+(5\times5)+2=52$$

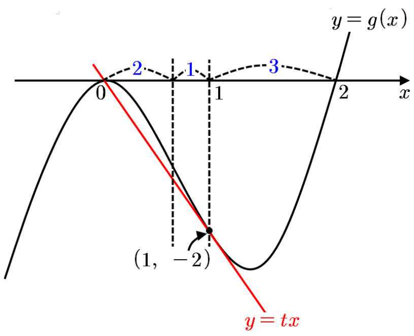
78) [정답] **56**

[해설]
함수 $f(x)$는 일차함수이므로 함수

$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$는 삼차함수이다.

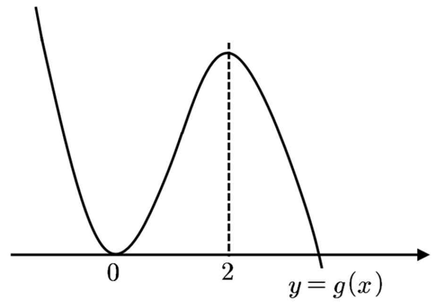
$g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)ds=0$에서 $g(2)=g(0)=0$이므로

$g(x)=0$의 세 근을 $x=0,\ 2,\ \alpha$라 하자.
이때 $y=tx$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이므로 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속이기 위해서는 $y=g(x)$는 x축에 접해야 한다.
따라서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=2$이다.
(ⅰ) $g(x)=mx^2(x-2)$일 때
m이 양수일 때와 음수일 때를 나누어 $y=g(x)$와 $y=tx$를 그려보면 다음과 같다.
$m>0$일 때

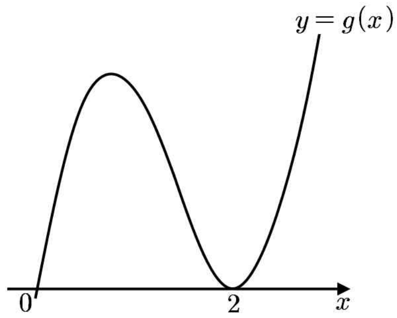


이때의 t의 값은 -2가 되어야 하고 $y=g(x)$와 $y=tx$의 교점은 $(1,\ -2)$이다.
$\therefore g(x)=2x^2(x-2),\ g(4)=64$

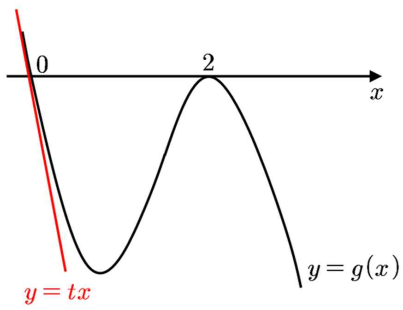
$m<0$일 때



$g(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.
(ⅱ) $y=mx(x-2)^2$일 때
$m>0$일 때



$g(x)$가 $x=2$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.
$m<0$일 때



마찬가지로 이때의 t의 값은 -2이므로
$g'(x)=m(x-2)^2+2mx(x-2)$

$g'(0)=4m=-2,\ m=-\dfrac{1}{2}$이므로

$g(4)=-8$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $g(4)$의 값의 합은 $64-8=56$

79) [정답] **80**

[해설]

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge1)\end{cases}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

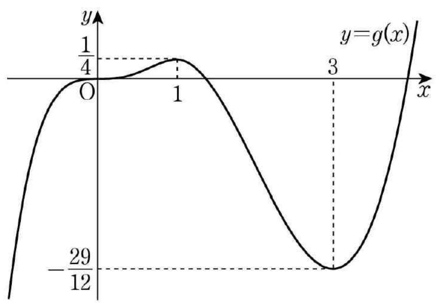
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$에서

$$C_2=-\frac{29}{12}$$

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x \ge 1) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t>\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t=-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t=\frac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(-\frac{29}{12}<t<\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\frac{1}{4}$과 $-\frac{29}{12}$뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고]

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,

$$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ii) $x\ge 1$일 때,

$$g(x)=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$$
$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$$

80) [정답] 10

[해설]

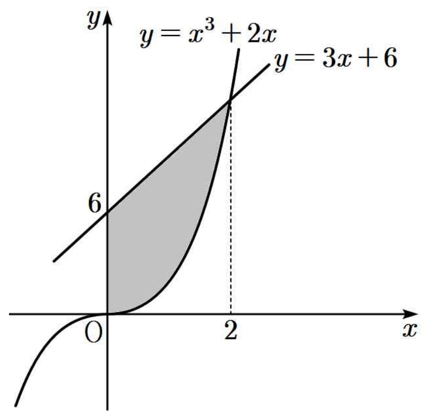
$x^3+2x=3x+6$에서

$x^3-x-6=0$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=2$

곡선 $y=x^3+2x$와 직선 $y=3x+6$의 그래프는 다음 그림과 같다.



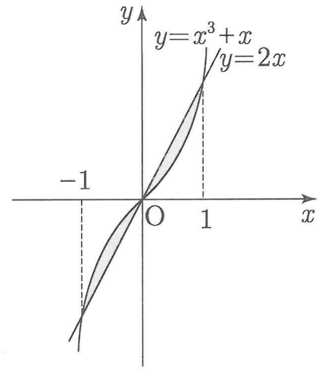
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 \{3x+6-(x^3+2x)\}dx$$
$$=\int_0^2 (-x^3+x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^2$$
$$=-4+2+12$$
$$=10$$

81) [정답] 30

[해설]

$x^3+x=2x$에서 $x(x-1)(x+1)=0$이므로 두 곡선은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 만난다.



$\therefore\ S=\int_{-1}^{1}|(x^3+x)-2x|\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 60S=30$

82) [정답] ③

[해설]

A$(-3,\ -1)$, B$(1,\ 3)$이라 하면 직선 AB의 방정식은

$y+1=\frac{3+1}{1+3}(x+3)$에서 $y=x+2\cdots\cdots$ ㉠

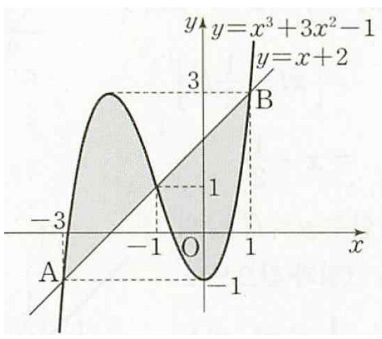
직선 ㉠과 곡선 $y=x^3+3x^2-1$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+3x^2-1=x+2$에서

$x^3+3x^2-x-3=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 두 점 $(-3,\ -1)$과 $(1,\ 3)$을 지나는 직선과 이 곡선으로 둘러

싸인 부부의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-3}^{-1}\{(x^3+3x^2-1)-(x+2)\}dx$

$+\int_{-1}^{1}\{(x+2)-(x^3+3x^2-1)\}dx$

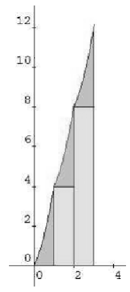
$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}$

$=4+4=8$

83) [정답] 17

[해설]

연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$즉 $2+a=a^2$에서



$a=2$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$S=3\int_{0}^{1}(2x^2+2x)dx+12$

$=3\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}+12$

$=5+12=17$

84) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{(x-3)^2}=6$이므로

$f(x)-1=(2x+a)(x-3)^2$(a는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+a)(x-3)^2}{(x-3)^2}$

$=\lim_{x\to 3}(2x+a)=6+a$

이므로

$6+a=6$에서 $a=0$

$f(x)-1=2x(x-3)^2$ 즉, $f(x)=2x(x-3)^2+1$

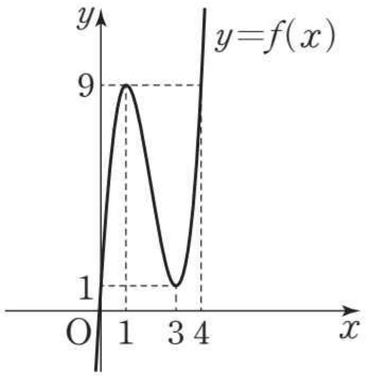
$f'(x)=6(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

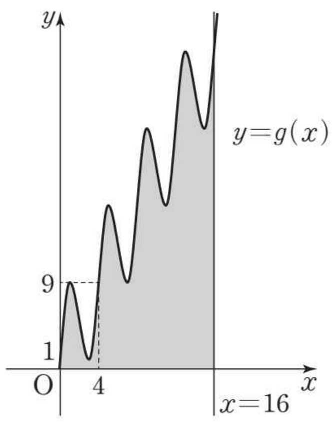
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 9를 갖고, $x=3$에서 극솟값 1을 갖는다.함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 9를 갖고, $x=3$에서 극솟값 1을 갖는다.



한편, 닫힌구간 $[4n,\ 4n+4]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $4n$만큼, y축 의 방향으로 $8n$만큼 평행이동한 것과 일치하므로

$$\int_{4n}^{4n+4} g(x)dx = 4\times 8n + \int_0^4 f(x)dx$$
$$= 32n + \int_0^4 f(x)dx$$



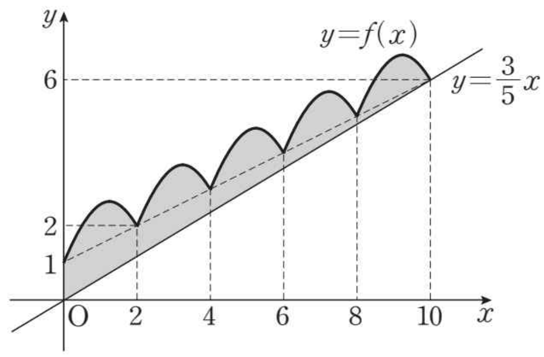
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{16} g(x)dx$$
$$= \int_0^4 g(x)dx + \int_4^8 g(x)dx + \int_8^{12} g(x)dx + \int_{12}^{16} g(x)dx$$
$$= \int_0^4 f(x)dx + \left\{32 + \int_0^4 f(x)dx\right\}$$
$$+ \left\{64 + \int_0^4 f(x)dx\right\} + \left\{96 + \int_0^4 f(x)dx\right\}$$
$$= 192 + 4\int_0^4 f(x)dx$$
$$= 192 + 4\int_0^4 \{2x(x-3)^2+1\}dx$$
$$= 192 + 4\int_0^4 (2x^3-12x^2+18x+1)dx$$
$$= 192 + 4\times\left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 + x\right]_0^4$$
$$= 192 + 4\times 20$$
$$= 272$$

85) [정답] 38

[해설]

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)+1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.



구하는 넓이는 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=\frac{3}{5}x$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합이다.

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1 = \int_0^2 \left\{\left(-x^2+\frac{5}{2}x+1\right) - \left(\frac{1}{x}+1\right)\right\}dx$$
$$= \int_0^2 (-x^2+2x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{4}{3}\times 5 = \frac{20}{3}$$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=\frac{3}{5}x$와 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 10 = 5$

그러므로 구하는 넓이 S는

$$S = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=35$이므로

$p+q=3+35=38$

86) [정답] 해설참조

[해설]

l : $y=8x$, $S=\dfrac{128}{3}$

87) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3-4x^2-x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-8x-1$이므로 $f'(2)=-5$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-5(x-2)$, $y=-5x+4$

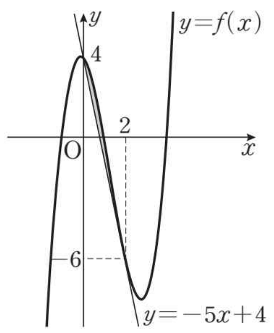
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-5x+4$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x^2-x+4=-5x+4$에서

$x^3-4x^2+4x=0$

$x(x-2)^2=0$

$x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_0^2\{(x^3-4x^2-x+4)-(-5x+4)\}dx$

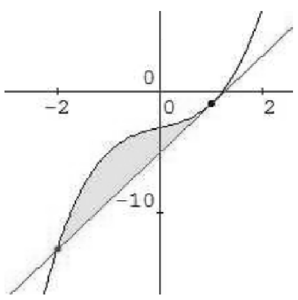
$=\displaystyle\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$

$=\dfrac{4}{3}$

88) [정답] 31

[해설]



$y=x^3+x-3$, $y'=3x^2+1$

접선은 $y=4x-5$이므로

$x^3+x-3=4x-5$

$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=(x-1)^3+3(x-1)^2$

$S=\displaystyle\int_{-2}^1(x-1)^2(x+2)dx$

$=\displaystyle\int_{-2}^1\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^1$

$=-\dfrac{81}{4}+27=\dfrac{27}{4}$

$\therefore\ \ p+q=4+27=31$

89) [정답] **100**

[해설]

$S_3=\displaystyle\int_0^1 x^3dx=\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_0^1=\dfrac{1}{4}$

$S_n=\displaystyle\int_0^1 x^ndx=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{n+1}$

$S_3-S_n>\dfrac{6}{25}$에서

$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{6}{25}$, $\qquad \dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{100}$

$\therefore n>99$

따라서 자연수 n의 최솟값은 100이다.

90) [정답] 32

[해설]

$S_1=-\displaystyle\int_{-1}^0 x^3dx=-\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0=\dfrac{1}{4}$

$S_2=\displaystyle\int_0^a x^3dx=\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_0^a=\dfrac{1}{4}a^4$

$S_2=4S_1$ 이므로 $\dfrac{1}{4}a^4=4\times\dfrac{1}{4}=1$, $a^4=4$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^2+2)=0$

이때 $a>0$ 이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $a^{10}=(\sqrt{2})^{10}=(2^{\frac{1}{2}})^{10}=2^5=32$

91) [정답] **290**

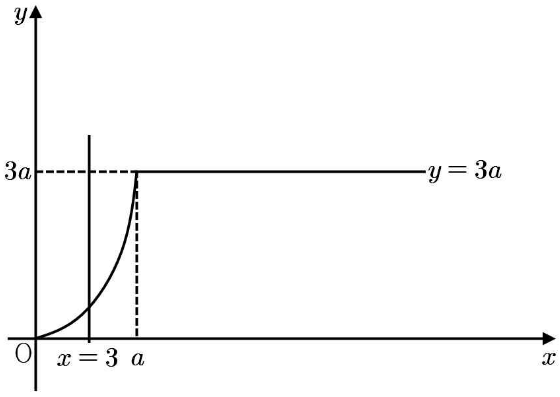
[해설]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

의 그래프는 y축 대칭함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 8이면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 4이다.

$x\ge 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

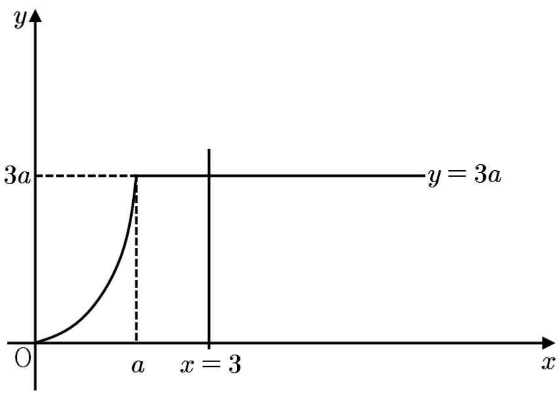
(ⅰ) $a\ge 3$일 때



$$\int_0^3 \frac{3}{a}x^2dx=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3=\frac{27}{a}=4$$

$$\therefore a=\frac{27}{4}$$

(ⅱ) $0<a<3$일 때



$$\int_0^a \frac{3}{a}x^2dx+(3-a)\times 3a$$

$$=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a+9a-3a^2$$

$$=-2a^2+9a$$

$$=4$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}\quad(\because\ 0<a<3)$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 만족하는 a는 $\frac{27}{4}$, $\frac{1}{2}$이므로 모든 a값의 합 S는 $S=\frac{29}{4}$

$$\therefore 40S=40\times\frac{29}{4}=290$$

92) [정답] ②

[해설]

$S_1=S_2$이고 두 곡선의 교점의 x좌표는 2이므로

$$S_1+S_2=2\int_0^2\{(x-4)^2-x^2\}dx=2\int_0^2(16-8x)dx$$

$$=2\left[16x-4x^2\right]_0^2=32$$

93) [정답] ④

[해설]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-1)$의 교점의 x좌표는

$-x(x-2)=-(x-1)(x-3)$에서 $x=\frac{3}{2}$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\frac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{9}{8}$$

이다. 이때 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=f(x-1)$은 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

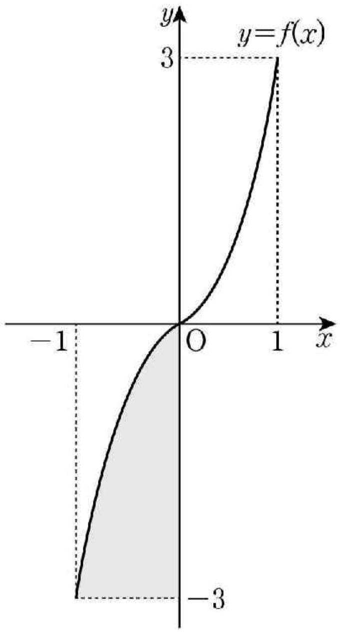
$$\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{3}{2}}^3 f(x-1)dx$$

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는 $\frac{9}{8}\times 2=\frac{9}{4}$이다.

94) [정답] 41

[해설]

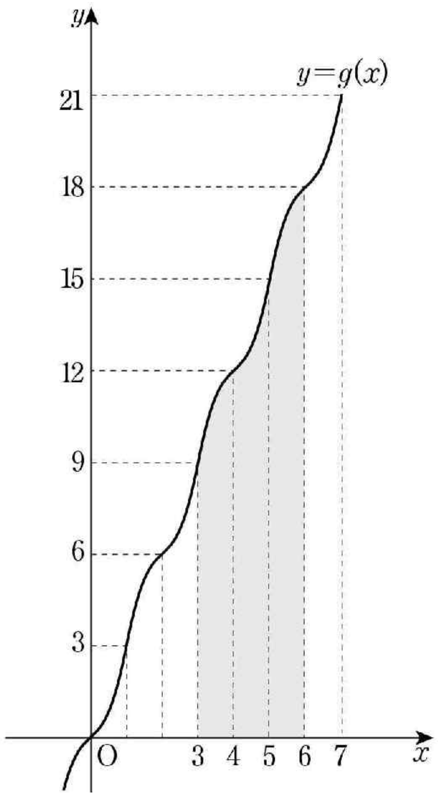
문제에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3, 6]$에서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^6 |g(x)|dx$는

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3, 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프이므로

$\int_3^5 g(x)dx=2\times12=24$

닫힌구간 $[5, 7]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 18만큼 평행이동한 그래프이므로

$\int_5^6 g(x)dx=15\times1+2=17$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx=41$

95) [정답] ①

[해설]

96) [정답] ①

[해설]
두 점의 위치는 각각

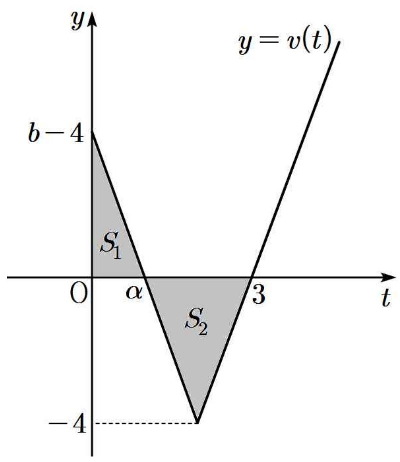
$x_1(t)=t^2+3t$, $x_2(t)=a\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)$

$t=3$일 때 같은 위치이므로 $9+9=a(27-9)$

$\therefore\ a=1$

97) [정답] 14

[해설]



조건 (가), (나)에서 $v(3)=0$이고, 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$s(3)=S_1+S_2$, $x(3)=S_1-S_2$

조건 (나)에서 $s(3)-x(3)=8$이므로

$(S_1+S_2)-(S_1-S_2)=8$

$\therefore S_2=4$

위의 그림에서

$S_2=\frac{1}{2}\times(3-\alpha)\times4=4$

$\therefore \alpha=1$

$v(2)=-4$이므로 $v(t)=|at-b|-4$에서

$v(2)=|2a-b|-4=-4$, $b=2a$

$v(1)=v(3)=0$이므로

$v(1)=|a-b|-4=0$, $|-a|=4$

$\therefore a=4\ (\because\ a>0)$, $b=8$

$v(t)=|4t-8|-4$이므로 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의

변화량은

$$\int_1^6 v(t)\,dt = -S_2 + \int_3^6 (4t-12)\,dt$$
$$= -4 + \left[2t^2 - 12t\right]_3^6$$
$$= -4 + 18 = 14$$

98) [정답] ①

[해설]

시각 $t=1$과 $t=k$에서 점 P의 위치가 같으므로

$$\int_1^k v(t)dt = \int_1^k (6-2t)dt$$
$$= \left[6t - t^2\right]_1^k$$
$$= 6k - k^2 - 5$$
$$= -(k-1)(k-5) = 0$$

$k>1$이므로 $k=5$

따라서 점 P가 $t=1$에서 $t=5$까지 움직인 거리는

$$\int_1^5 |v(t)|dt = \int_1^5 |6-2t|dt$$
$$= \int_1^3 (6-2t)dt + \int_3^5 (2t-6)dt$$
$$= \left[6t-t^2\right]_1^3 + \left[t^2-6t\right]_3^5$$
$$= 4+4 = 8$$

99) [정답] (1) $\frac{2}{9}$ (2) 9

[해설]

(1)점 P는 $0<t<3$일 때 원점에서 멀어지고 $3 \le t \le 6$일 때 원점에 가까워진다.

$$\int_0^3 v(t)dt = a\int_0^3 (t^3 - 9t^2 + 18t)dt = \frac{9}{2}$$ 이므로

$$a = \frac{2}{9}$$

(2) $v(t)$는 $(3, 0)$에 점대칭 함수 이므로 $0 \le t \le 6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9$$

100) [정답] ②

[해설]

$$\begin{cases} x_1(t) = t^3 - 3t^2 \\ x_2(t) = t^2 \end{cases}$$ 이므로 $a^3 - 3a^2 = a^2$

$\therefore\ a = 4\ (\because\ a>0)$

또한, $\{x_1(t)\}' = 3t^2 - 6t$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |\,3t^2 - 6t\,|dt$$
$$= \int_0^2 (-3t^2+6t)dt + \int_2^4 (3t^2-6t)dt$$
$$= \frac{3\times(2-0)^3}{6} + x_1(4) - x_1(2)$$
$$= 4 + 20$$
$$= 24$$

따라서 움직인 거리는 24이다.