[유형별한글] [미적] 사관학교 최근5개년

06 미적 01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

06 극한식의 해석2 (무한대-무한대)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 23

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{n^2-1}}=4$ 일 때, ab 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2. $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+2n+3}-(an+b)\right\}=5$가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, 합 $a+b$의 값을 구하시오.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+an}-bn\right)=b$를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

01 등비수열의 극한의 수렴 조건

4. 수열 $\left\{\left(\frac{4-x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 3 ② 6 ③ 10

④ 15 ⑤ 21

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

5. 수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

6. 수열 $\left\{\left(\frac{x^2-4x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

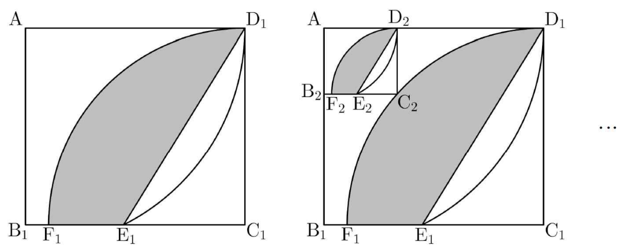
06 미적 02 급수

03 급수의 활용

10 등비급수와 도형3 (넓이)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 26

7. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 F_1이라 하자. 호 D_1F_1과 두 선분 D_1E_1, F_1E_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 호 D_1F_1위의 점 C_2, 선분 AD_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고
$\overline{AB_2}$: $\overline{AD_2}=2$: $\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.
중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 E_2, 중심이 C_2이고 반지름의 길이가 $\overline{C_2D_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 F_2라 하자. 호 D_2F_2와 두 선분 D_2E_2, F_2E_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 …

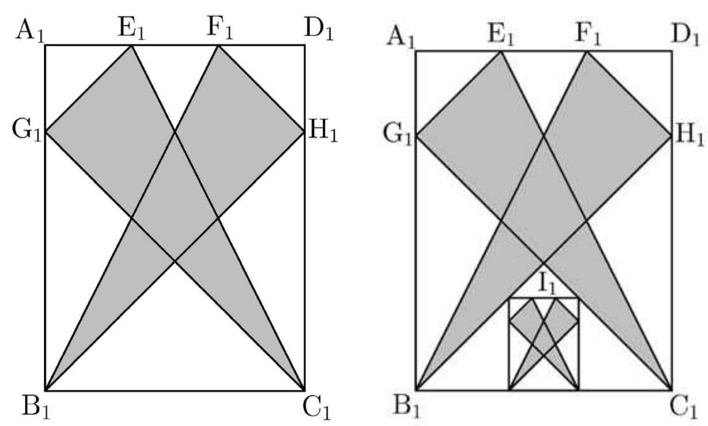
① $\dfrac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$ ② $\dfrac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$

③ $\dfrac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$ ④ $\dfrac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$

⑤ $\dfrac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 27

8. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1$, $B_1H_1F_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1이 만나는 점을 I_1이라 하자.
선분 B_1I_1 위의 점 A_2, 선분 C_1I_1 위의 점 D_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 되도록 잡는다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2

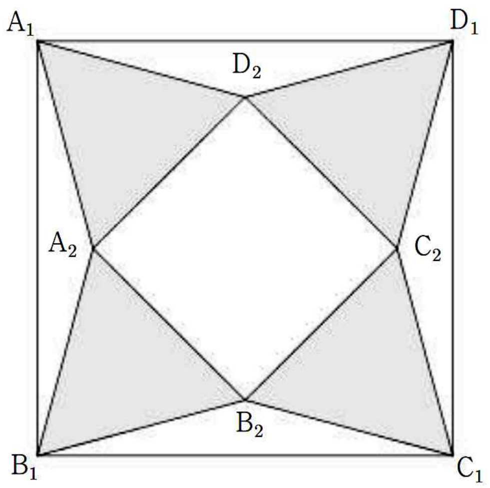
① $\dfrac{347}{64}$ ② $\dfrac{351}{64}$ ③ $\dfrac{355}{64}$

④ $\dfrac{359}{64}$ ⑤ $\dfrac{363}{64}$

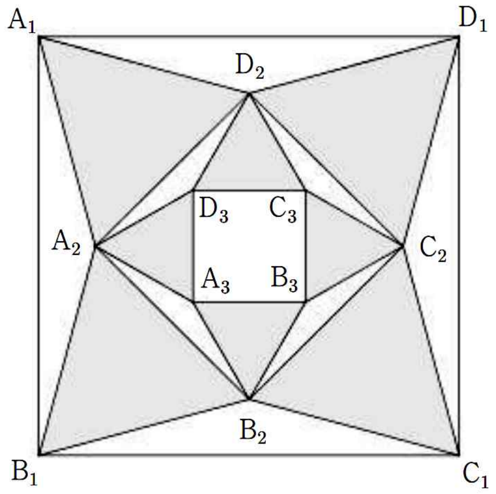
[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2를 네 삼각형 $A_2A_1B_1$, $B_2B_1C_1$, $C_2C_1D_1$, $D_2D_1A_1$이 모두 한 내각의 크기가 150°인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$, $D_1D_2C_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 네 점 A_3, B_3, C_3, D_3을 네 삼각형 $A_3A_2B_2$, $B_3B_2C_2$, $C_3C_2D_2$, $D_3D_2A_2$가 모두 한 내각의 크기가 150°인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_2A_3D_3$, $B_2B_3A_3$, $C_2C_3B_3$, $D_2D_3C_3$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2

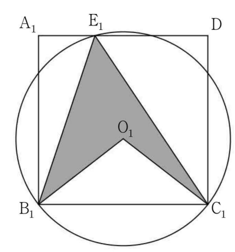


⋮ ⋮

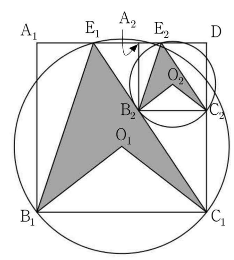
① $5-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ② $6-2\sqrt{3}$ ③ $7-\frac{5}{2}\sqrt{3}$
④ $8-3\sqrt{3}$ ⑤ $9-\frac{7}{2}\sqrt{3}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim S_n$의 값은?



R_1



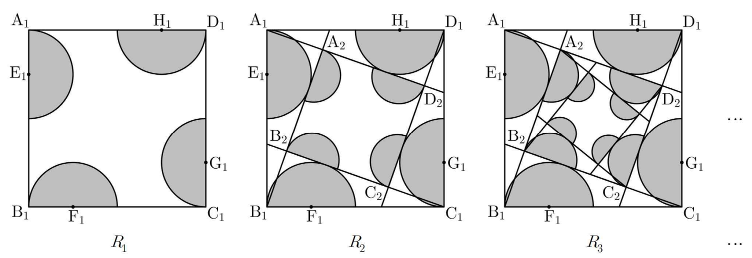
R_2

⋯

① $\frac{90}{7}$ ② $\frac{275}{21}$ ③ $\frac{40}{3}$
④ $\frac{95}{7}$ ⑤ $\frac{290}{21}$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 4개의 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 $1:3$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 점 E_1, F_1, G_1, H_1 각각을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$인 4개의 반원을 그린 후 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 A_2, 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 B_2, 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 C_2, 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 D_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 4개의 반원을 그리고 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$ ② $\frac{19\sqrt{2}\pi}{8}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$

④ $\frac{21\sqrt{2}\pi}{8}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}\pi}{4}$

06 미적

03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

13 지수로그함수의 연속성

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

12. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -14x+a & (x \le 1) \\ \dfrac{5\ln x}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

13. 함수 $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & (x \le 0) \\ \dfrac{\ln(ax+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$ 가 $x=0$에서 연속이 되기 위한 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x+a)-2}{x} & (x>0) \\ x^2-3x+b & (x \le 0) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

06 미적 05 삼각함수의 미분

01 삼각함수의 극한

04 극한의 계산4 (코사인)

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 3

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1-\cos x}$ 을 구하여라.

06 미적

05 삼각함수의 미분

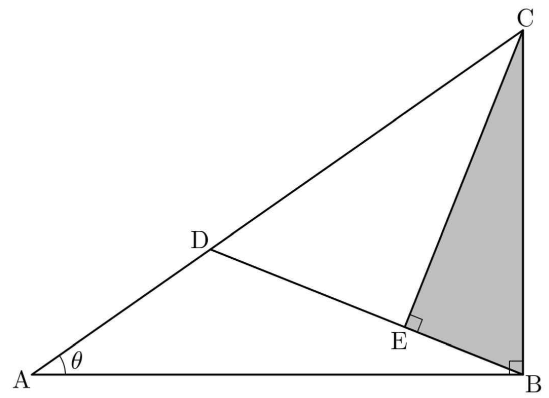
02 극한의 해석 및 활용

04 활용2 (다각형의 성질)

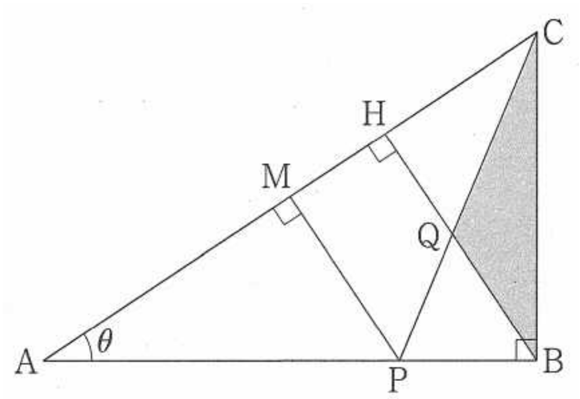
[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하자. 선분 AC를 $4:7$로 내분하는 점을 D라 하고 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 삼각형 CEB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

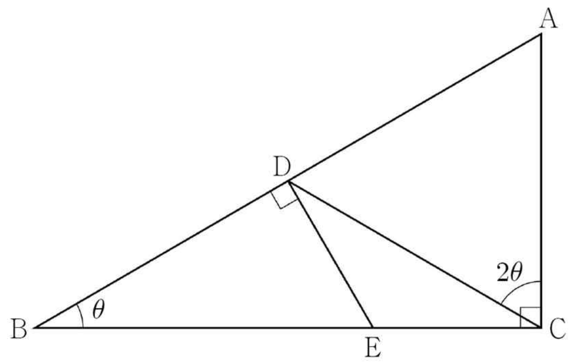


19. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 AC의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AC에 수직인 직선이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하고, 두 선분 CP와 BH의 교점을 Q라 하자. $\angle CAB=\theta$이고, 삼각형 BCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$이다. $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 20

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, $\angle CBA=\theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위에 $\angle ACD=2\theta$가 되도록 점 D를 잡고, 선분 BC 위에 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}$가 되도록 점 E를 잡는다. 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10

06 미적

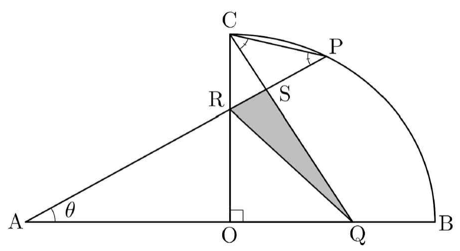
05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

06 활용4 (원과 도형)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

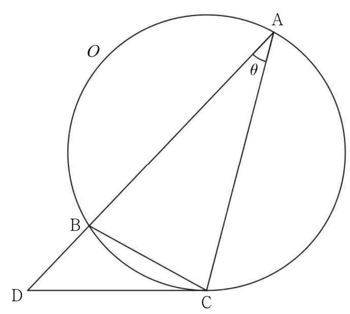
21. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다.
호 BC위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB위의 점 Q가 $\angle APC = \angle PCQ$를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

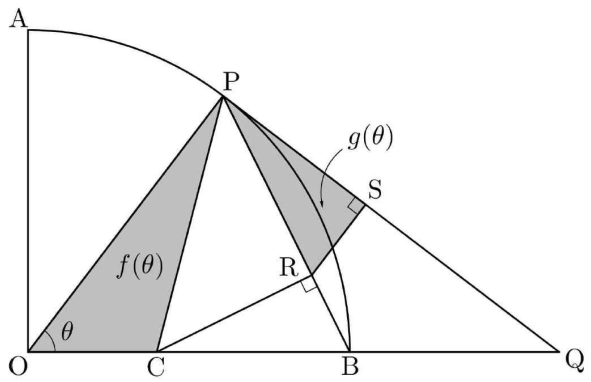
[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

22. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB = \theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)



[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

23. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 2 : 3으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle POB=\theta$일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



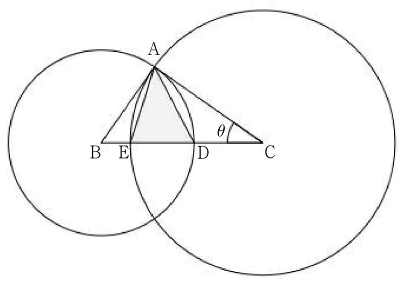
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

07 활용5 (두 개 이상의 원 또는 부채꼴의 관계)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

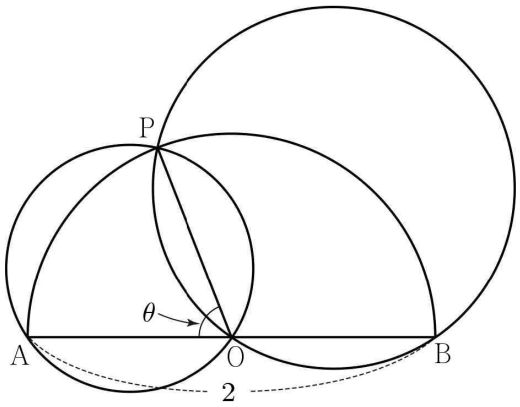
24. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{BC}=8$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle ACB=\theta$라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?



① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 19

25. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle AOP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 세 점 B, O, P를 지나는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$의 값은?



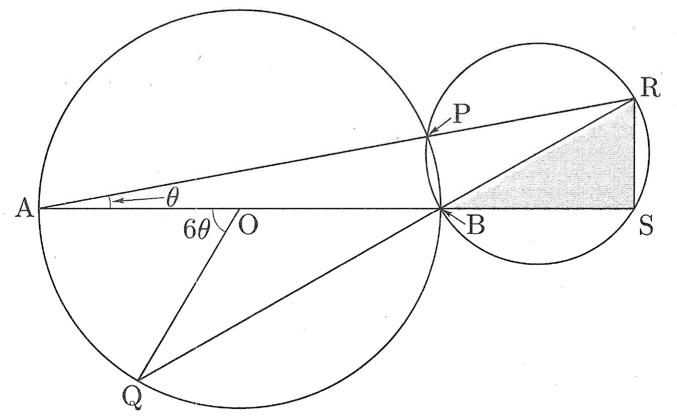
① π ② $\frac{2\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하자. $\angle PAB=\theta$, $\angle AOQ=6\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, QB가 만나는 점을 R라 할 때, 세 점 P, B, R를 지나는 원과 직선 AB가 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 S라 하자. 삼각형 RBS의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=p$이다. $50p$의 값을 구하시오.

(단, 두 선분 AP, BQ는 서로 만나지 않는다.)



06 미적 05 삼각함수의 미분

03 삼각함수의 도함수

04 조건해석2 (극한식의 해석)

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\tan\frac{1}{2}x}=6$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=22$

$f(1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

28. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=0$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{x}=6$

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

29. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+3x^2}=2$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{(\sin x+\tan x)(1-\cos x)}=3$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 미적

06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

05 지수함수1 (공식)

30. 함수 $f(x)=x^3+e^{2x-4}$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

31. 함수 $f(x)=(2x+1)e^{3x-6}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

32. 함수 $f(x)=(3x+e^x)^3$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

06 미적 06 여러 가지 함수의 미분법

03 초월함수의 미분법

07 지수함수3 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 11

33. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$ 에 대하여 $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ 에서 방정식 $f(x)-f'(x)=0$ 의 실근은? [3점]

① $-\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{6}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$

④ $\dfrac{\pi}{3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

34. 함수 $f(x)=2^x+2^{2x}$ 에 대하여 $f'(x)=36\ln 2$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$

④ 2 ⑤ $4\ln 2$

35. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\csc x}$ 에 대하여 방정식 $f(x)=f'(x)$ 의 실근은? (단, $0<x<\pi$)

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$

④ $\dfrac{2}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$

06 미적

07 여러 가지 미분법

02 음함수 미분법

01 음함수의 미분법1 (공식)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

36. 곡선 $x^2+y^3-2xy+9x=19$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

37. 곡선 $x^2+3xy^2=4$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

38. 곡선 $x^2-2xy+3y^3=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{6}{5}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

01 역함수의 미분법1 (공식)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

39. 함수 $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2+1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

40. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(2)=1,\ f'(2)=3$을 만족시키고 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 미분가능할 때, $(f^{-1})'(1)$의 값을 구하시오.

41. $x>1$에서 정의된 함수 $f(x)=x^{\ln x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\dfrac{1}{g'(e^4)}$의 값을 구하면? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① e^2 ② $2e^2$ ③ $4e^2$

④ $8e^2$ ⑤ $10e^2$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

02 역함수의 미분법2 (결합 또는 합성함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 24

42. 함수 $f(x)=x^3+3x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)=e^x$ 에 대하여 $(h \circ g)'(5)$ 의 값은?

① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{7}$ ③ $\frac{e}{6}$
④ $\frac{e}{5}$ ⑤ $\frac{e}{4}$

43. 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=f(2g(x))$라 할 때, $h'(3)$의 값은?

① $\frac{17}{12}$ ② $\frac{17}{8}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

44. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(0)=2,\ f'(1)=3$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하고 $h(x)=(g \circ g)(x)$ 라 할 때, $h'(2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

06 미적 07 여러 가지 미분법

03 역함수 미분법

05 역함수의 미분법5 (함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 27

45. 양의 실수 t에 대하여 곡선

$$y=\ln(2x^2+2x+1)\,(x>0)$$

과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은?

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$

④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

46. $0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $f'(5)+g'(5)$의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{13}{30}$

④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{79}{12}$

47. 삼차함수 $f(x)=ax(x-3)^2$이 있다. 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=-x+t$와 곡선 $y=f(x)$가 항상 한 점에서만 만나도록 하는 실수 a의 최댓값을 p라 하자. $a=p$일 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=-x+t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 $g(t)$라 하고, 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 하자. 방정식 $h(t)=t$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $g'(\alpha)+h'(\beta)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

06 미적 08 접선의 방정식

01 접선의 방정식

02 접점 이용2 (매개변수)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

48. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$$

가 있다. 이 곡선 위의 $t=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서의 접선의 y절편을 구하시오.

49. 좌표평면에서 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=1+\ln t,\ y=\frac{t^2-1}{2t}$$

위의 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ k)$이다. k의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

50. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타낸 곡선

$$x=e^t+\ln t,\ y=e^{2t}-2t$$

에 대하여 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선이 점 $\left(\frac{1}{2}e,\ k\right)$를 지날 때, 상수 k의 값은?

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e

④ $e+1$ ⑤ $e+2$

06 미적 08 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

01 활용1 (두 직선이 이루는 각의 크기)

51. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 곡선 $y=x^2$에 각각 접하는 두 직선이 이루는 예각을 θ라 하자. $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

52. 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{8}{x}$의 교점에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 그은 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

53. 함수 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$의 그래프 위의 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $12\tan\theta$의 값을 구하시오.

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

01 증가와 감소, 극대와 극소

05 극대와 극소2 (해석)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

54. 함수 $f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^{x}$이 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.)

① $1-\ln 2$ ② $2-2\ln 2$ ③ $3-3\ln 2$

④ $4-4\ln 2$ ⑤ $5-5\ln 2$

55. 함수 $f(x)=e^{x}\left(x^2-2x+a\right)$는 $x=a$에서 극댓값 M을 가질 때, aM의 값은?

① $-\frac{12}{e^2}$ ② $-\frac{10}{e^2}$ ③ $-\frac{8}{e^2}$

④ $-\frac{6}{e}$ ⑤ $-\frac{4}{e}$

56. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=\left(x^2+a\right)e^{x}$이 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① $\frac{16}{e^4}$ ② $\frac{8}{e^4}$ ③ $\frac{4}{e^4}$

④ $\frac{16}{e^2}$ ⑤ $\frac{8}{e^2}$

06 미적 09 극대,극소와최대,최소

03 그래프의 개형

05 그래프의 개형5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

57. 세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax^2+6ex+b & (x<c)\\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\geq c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은?

① $-4\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$

③ $-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ④ $-3\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$

⑤ $-2\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\leq x\leq 2)\\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0\ \text{또는}\ x>2)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2)\neq 0$이다.

(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

(다) $g(k)=0$, $g'(k)=\dfrac{16}{3}$인 실수 k가 존재한다.

함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오.

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

59. 두 함수

$$f(x)=x^2-ax+b\ (a>0),\ g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$$

에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
>
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \frac{5}{2}<e<3\text{이고, } \lim_{x\to\infty}g(x)=0\text{이다.}\right)$

60. 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 0인 사차함수 $g(x)$와 함수 $f(x)=7x^ne^{-x}$ (n은 자연수)에 대하여 합성함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
>
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 실근은 모두 0보다 크거나 같다.
>
> (다) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

$h''(0)=0$이 되는 자연수 n의 최솟값을 a라 할 때, $g'(a)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

61. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(e^{-x})$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|g(|x|)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.
>
> (나) 방정식 $|g(|x|)|=-f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(5)$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

01 방정식과 미분

07 방정식과 미분7 (기타 정의된 함수)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

62. 두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,\ g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다 $0<x<2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.)

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$일 때, 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$가 $x=\alpha(0<\alpha<2\pi)$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

63. 함수 $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$이 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $k=2$일 때, $g(2)=4$이다.

ㄴ. 함수 $h(k)$의 최댓값은 4이다.

ㄷ. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $e^2\le k<e^4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

02 부등식과 미분

04 부등식과 미분4 (활용)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

64. 최고차항의 계수가 -2인 이차함수 $f(x)$와 두 실수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+1)}{x} & (x<0) \\ f(x)e^{x-a}+b & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0-} g(x)=2$이고 $g'(a)=-2$이다.

(나) $s<0\leq t$이면 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}\leq -2$이다.

$a-b$의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

65. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1}\leq ax+b\leq e^{x-2}$$

이 성립한다.

$|M\times m^3|=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

66. 함수 $f(x)=e^{2x}-ae^{x}$에 대하여

$$f'(t)(x-t)+f(t),\ \{f(t+1)-f(t)\}(x-t)+f(t)$$

중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하고 작지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, $t\leq x\leq t+1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$이 되도록 하는 t의 값의 범위가

$$t\leq -k \text{ 또는 } t\geq k \ (k\text{는 양의 상수})$$

이다. a의 값은?

① $4\sqrt{e^2+1}$ ② $2\sqrt{e^2+1}$ ③ $2\sqrt{e^2-1}$

④ $\sqrt{e^2+1}$ ⑤ $\sqrt{e^2-1}$

06 미적 10 방부등식에의 활용과 평면운동

03 속도와 가속도

03 평면 운동2 (속도, 가속도의 크기)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 7

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 7

67. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=2t+\sin t,\ y=1-\cos t$$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력은?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

68. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x, y)$가

$$x=\cos t+2,\quad y=3\sin t+1$$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{6}$에서 점 P의 속력은?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

69. 반지름의 길이가 1인 원이 만드는 사이클로이드에서 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$$

이다. $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속도의 크기를 구하여 보자.

06 미적　　11 부정적분

02 치환적분과 부분적분

08 부분적분3 (로그함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 26

70. 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$이다. $f(1)=0$일 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{e-2}{3e}$　② $\frac{e-2}{2e}$　③ $\frac{e-1}{3e}$

④ $\frac{e-2}{e}$　⑤ $\frac{e-1}{e}$

71. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(2x+1)\ln x$이고 $f(1)=\frac{1}{2}$일 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{1}{2}e^2$　② $\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}e^2+1$

④ $\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{2}e^2+2$

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 실전 모의고사 2회 5지선다형

72. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$

(나) $f'(x)=\frac{a+\ln(ex)}{x^2}$

$a+f(e)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\frac{5}{e}$　② $-\frac{4}{e}$　③ $-\frac{3}{e}$

④ $-\frac{2}{e}$　⑤ $-\frac{1}{e}$

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

02 치환적분2 (지수로그식의 치환적분)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

73. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{1}^{e^2} \frac{f(1+2\ln x)}{x}dx = 5$$

일 때, $\int_{1}^{5} f(x)dx$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

74. 등식 $\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+e^x}dx = 2$를 만족시키는 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

06 미적

12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

03 활용3 (함수 구하기)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

75. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서

미분가능할 때, $\displaystyle\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$　② $\ln 5$　③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$

④ $2\ln 5$　⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

76. 양수 a와 자연수 k에 대하여 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{4\pi}{a}\right)$에서

정의된 함수

$$f(x)=\left|\ln\frac{2+\sin(ax)}{k}\right|$$

가 있다. 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않도록 하는 실수 x가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $0<\alpha<\dfrac{4\pi}{a}$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 하자.

$\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_{m-1}} f(x)\cos(ax)dx=\ln\frac{2\sqrt[3]{e}}{3}$일 때, $a+k+m$의 값은?

① 11　② 12　③ 13

④ 14　⑤ 15

77. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c & (x \le 1) \\ 2x^2+px+q & (x>1) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)+1=f(\pi)+1=0$
(나) 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin(2t+\pi)x\,dt$$

일 때, 자연수 n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} 8n^3 g(n)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

06 미적

12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수2 (적분함수)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

78. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=x^2e^{-x}+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{e+1}{e^2}$ ③ $\frac{e+2}{e^2}$
④ $\frac{e+3}{e^2}$ ⑤ $\frac{e+4}{e^2}$

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 09 적분법 유형3

79. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=2\int_0^x f'(t)dt-x\cos x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

80. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^x-1+\int_0^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $f'(0)=1$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

07 활용4 (함수 구하기)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

81. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\frac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.)

82. 정의역이 $\{x \mid x > -5\}$이고 $-5 < x_1 < 1 < x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\int_{x_1}^{1} f(x)dx \geq 0,\ \int_{1}^{x_2} f(x)dx \geq 0$$

을 만족시키는 연속함수 $f(x)$가 있다. 최고차항의 계수가 1이고 $g(0) \geq -3$인 이차함수 $g(x)$가 열린 구간 $(-5,\ \infty)$에서

$$g(x) = f(x)\int_{1}^{x} f(t)dt$$

일 때, $\int_{x}^{13} f(t)dt$의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

83. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq \dfrac{12x}{\sqrt{x^2+7}}$이다. $x \geq -3\sqrt{2}$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \int_{-3\sqrt{2}}^{x} f(t)dt - 12\sqrt{x^2+7}$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \geq -3$일 때,
>
> $g(x) = \dfrac{1}{12}(x-3)(x^3+ax^2+bx+c) - 48$이다.
>
> (단, a, b, c는 상수이다.)
>
> (나) $g'(-3) = g'(\alpha) = 0$ (단, α는 $\alpha > -3$인 상수이다.)

$f(-4)+f(4)$의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

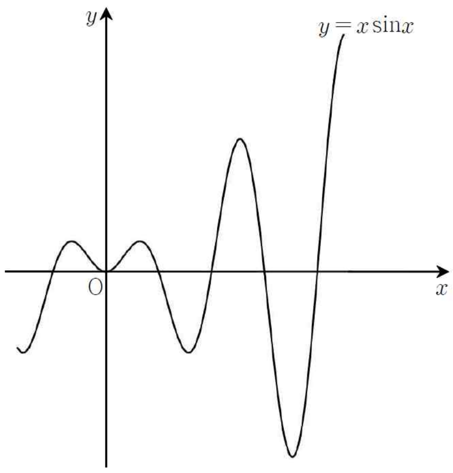
09 활용5 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

84. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여 $\int_0^\alpha t\sin t dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여 $\int_0^\beta t\sin t dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

85. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x\le 1$에서 $f(x)<0$이다.

(나) $\int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx=2$, $\int_0^1 |f(x)\sin x|dx=3$

함수 $g(x)=\int_{-1}^x |f(t)\sin t|dt$에 대하여

$$\int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx=\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

86. 함수 $f(x)=\frac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\frac{12}{e^{12}}, \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오.

06 미적

13 정적분의활용

01 정적분과 급수

03 정적분과 급수2 (초월함수)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 24

87. $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}$의 값은?

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{2}{3}\ln 2$ ③ $\ln 2$

④ $\frac{4}{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{3}\ln 2$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

88. 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $\ln 2$ ② $(\ln 2)^2$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$

④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 25

89. 함수 $f(x)=x^2e^{x^2-1}$에 대하여

$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① e^3-1 ② $e^3-\frac{1}{e}$ ③ e^4-1

④ $e^4-\frac{1}{e}$ ⑤ e^5-1

06 미적 13 정적분의활용

02 정적분과 넓이

05 넓이5 (곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

90. 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$과 이 곡선 위의 점 $(3,\ e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{e}{2}-1$ ② $e-2$ ③ $\frac{3}{2}e-3$

④ $2e-4$ ⑤ $\frac{5}{2}e-5$

91. 곡선 $y=e^{x}$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=e^{x}$과 접선 l 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① e^2-5 ② e^2-4 ③ e^2-3

④ e^2-2 ⑤ e^2-1

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

03 넓이와 해석3 (넓이로 정의된 함수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

92. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$$y=\sin x,\ y=a\tan x$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

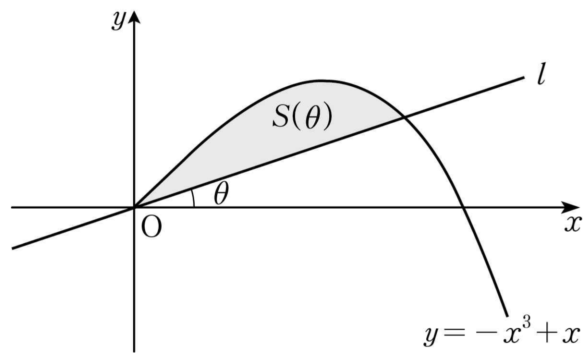
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

93. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=0$, $x=t\,(t>1)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

94. 그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$인 직선을 l이라 하자. 곡선 $y=-x^3+x\,(x\ge 0)$과 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ 의 값은?



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

06 미적

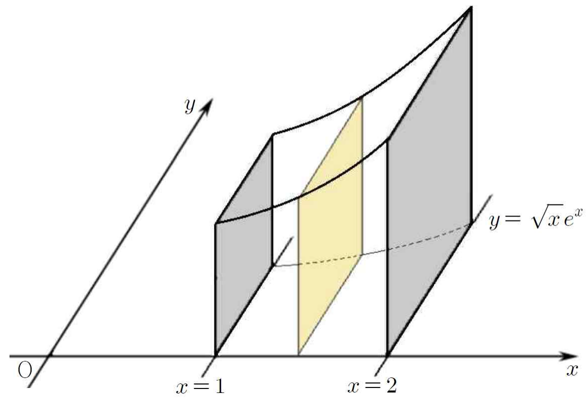
13 정적분의활용

04 정적분과 부피

01 부피1 (좌표평면과 함수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

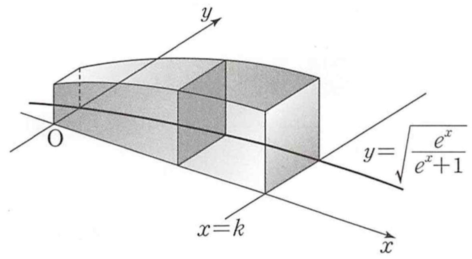
95. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}e^{x}$ $(1 \le x \le 2)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{e^4+e^2}{4}$ ② $\frac{2e^4-e^2}{4}$ ③ $\frac{2e^4+e^2}{4}$

④ $\frac{3e^4-e^2}{4}$ ⑤ $\frac{3e^4+e^2}{4}$

96. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$과 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\ln 7$일 때, k의 값은?

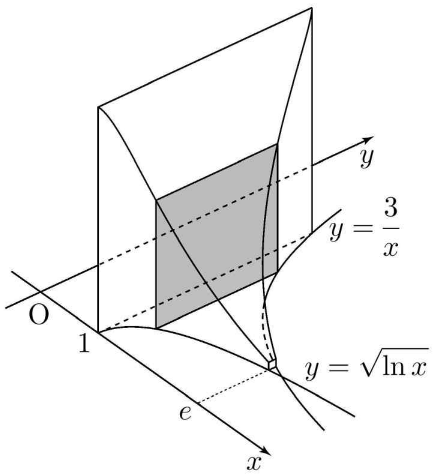


① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$

④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

97. 그림과 같이 두 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$, $y=\sqrt{\ln x}$ 와 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $5-\dfrac{9}{e}$ ② $5-\dfrac{8}{e}$ ③ $5-\dfrac{7}{e}$

④ $6-\dfrac{9}{e}$ ⑤ $6-\dfrac{8}{e}$

06 미적

13 정적분의활용

05 평면운동과 곡선의 길이

05 곡선의 길이1 (매개변수로 주어진 함수)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 25

98. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t\cos(\sqrt{3}t)-1,\ y=e^t\sin(\sqrt{3}t)+1$$

$(0\le t\le \ln 7)$

의 길이는?

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

99. $0\le t\le 2\pi$ 일 때, 곡선 $x=1+\sin t$, $y=2-\cos t$ 의 길이를 구하시오.

100. $0 \le t \le 2\pi$일 때, t를 매개변수로 하는 아래 곡선의 길이를 구한 것은?

$$x = 3 + \sin t,\ y = 2 - \cos t$$

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

[유형별한글] [미적] 사관학교
최근5개년(빠른 정답)

작업공간 2022.12.15

1. [정답] ②
2. [정답] -3
3. [정답] 10
4. [정답] ⑤
5. [정답] 9

6. [정답] 8
7. [정답] ③
8. [정답] ⑤
9. [정답] ②
10. [정답] ②

11. [정답] ①
12. [정답] 19
13. [정답] ③
14. [정답] ③
15. [정답] ①

16. [정답] ④
17. [정답] 8
18. [정답] 9
19. [정답] 50
20. [정답] ①

21. [정답] ④
22. [정답] 8
23. [정답] 49
24. [정답] ⑤
25. [정답] ①

26. [정답] 75
27. [정답] ②
28. [정답] ②
29. [정답] ⑤
30. [정답] ④

31. [정답] 17
32. [정답] 12
33. [정답] ③
34. [정답] ④
35. [정답] ③

36. [정답] 11
37. [정답] ①
38. [정답] ①
39. [정답] ①
40. [정답] $\frac{1}{3}$

41. [정답] ③
42. [정답] ③
43. [정답] ⑤
44. [정답] ①
45. [정답] ①

46. [정답] ②
47. [정답] ⑤
48. [정답] 6
49. [정답] ①
50. [정답] ①

51. [정답] ⑤
52. [정답] ⑤
53. [정답] 9
54. [정답] ④
55. [정답] ①

56. [정답] ②
57. [정답] ③
58. [정답] 64
59. [정답] 6
60. [정답] 24

61. [정답] ④
62. [정답] ⑤
63. [정답] ②
64. [정답] 4
65. [정답] 43

66. [정답] ②
67. [정답] ⑤
68. [정답] ③
69. [정답] 1
70. [정답] ④

71. [정답] ⑤
72. [정답] ④
73. [정답] ⑤
74. [정답] ④
75. [정답] ①

76. [정답] ②
77. [정답] ②
78. [정답] ②
79. [정답] ②
80. [정답] ⑤

81. [정답] 16
82. [정답] 83
83. [정답] 21
84. [정답] ③
85. [정답] 19

86. [정답] 18
87. [정답] ②
88. [정답] ④
89. [정답] ①
90. [정답] ③

91. [정답] ①
92. [정답] ②
93. [정답] ①
94. [정답] ④
95. [정답] ④

96. [정답] ②
97. [정답] ④
98. [정답] ④
99. [정답] 2π
100. [정답] ②

[유형별한글] [미적] 사관학교
최근5개년(해설)

작업공간 2022.12.15

1) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+bn}+\sqrt{n^2-1}}{(a-1)n^2+bn+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{(a-1)n+b+\frac{1}{n}}$$

위의 값이 수렴하려면 $a-1=0$, 즉 $a=1$이고 이때 수렴하는 값은 $\frac{a+1}{b}=\frac{2}{b}$이므로 $\frac{2}{b}=4$에서 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}$

2) [정답] **−3**

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+2n+3}-(an+b)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3-a^2n^2-2abn-b^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(1-ab)n+3-b^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+(an+b)}$$

위 극한값이 존재하므로 $a=-1$ 또는 $a=1$

$a=-1$이면 준식의 값이 수렴하지 않고 발산하므로 모순,

따라서 $a=1$ …… ①

준식$=\frac{2(1-b)}{1+1}=1-b=5\ \rightarrow\ b=-4$ …… ②

①, ②에서 $a+b=-3$

3) [정답] **10**

[해설]

(ⅰ) $b\le 0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+an}-bn\right)=\infty$$

(ⅱ) $b>0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+an}-bn\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+an}-bn\right)\left(\sqrt{4n^2+an}+bn\right)}{\sqrt{4n^2+an}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+an}\right)^2-(bn)^2}{\sqrt{4n^2+an}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-b^2)n^2+an}{\sqrt{4n^2+an}+bn} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠에서 $4-b^2\neq 0$이면 발산하므로

$4-b^2=0$이고 $b>0$이므로 $b=2$

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{4n^2+an}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4+\frac{a}{n}}+2}$$
$$=\frac{a}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{a}{4}=b$에서 $a=4b=4\times 2=8$

따라서 $a+b=8+2=10$

4) [정답] ⑤

[해설]

$\left\{\left(\frac{4-x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{4-x}{3}\le 1$

$\therefore\ 1\le x<7$

모든 정수 x값의 합은

$1+2+\cdots+6=21$

5) [정답] **9**

[해설]

수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하므로 $-1<x^2-6x+9\le 1$

즉, $(x-3)^2\le 1$에서 $2\le x\le 4$

따라서 만족하는 정수 x는 $x=2,\ 3,\ 4$이므로 합은

$2+3+4=9$

6) [정답] 8

[해설]

주어진 수열이 수렴하려면 $-1<\dfrac{x^2-4x-1}{4}\le 1$이어야 한다.

(i) $-1<\dfrac{x^2-4x-1}{4}$에서

$x^2-4x-1>-4,\ x^2-4x+3>0,\ (x-1)(x-3)>0$

$x<1$ 또는 $x>3$ ……㉠

(ii) $\dfrac{x^2-4x-1}{4}\le 1$에서

$x^2-4x-1\le 4,\ x^2-4x-5\le 0,\ (x+1)(x-5)\le 0$

$-1\le x\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

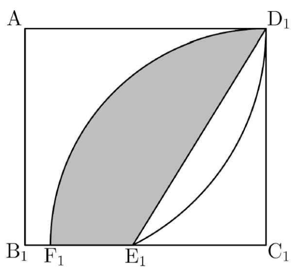
$-1\le x<1$ 또는 $3<x\le 5$

따라서 구하는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 4,\ 5$이고 그 합은

$-1+0+4+5=8$

7) [정답] ③

[해설]



R_1

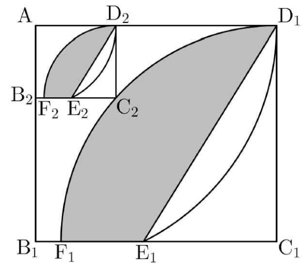
$\overline{AB_1}=2,\ \overline{AD_1}=\sqrt{5}$이고 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1이기 때문에 $\overline{AE_1}=\sqrt{5}$이다.

이때 $\triangle AB_1E_1$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{B_1E_1}=1$이고 $\overline{E_1C_1}=\sqrt{5}-1$이다.

색칠된 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1C_1D_1$의 넓이에서 삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이를 뺀 것이므로

$$S_1=\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1)$$
$$=\pi-\sqrt{5}-1$$

한편,



R_2

$\overline{AB_2}=2k,\ \overline{AD_2}=\sqrt{5}k$라 두면 $\overline{AC_2}=3k$이다.

이때 $\square AB_2C_2D_2\backsim\square AB_1C_1D_1$이므로 점 A와 점 C_2와 점 C_1는 일직선상에 있다.

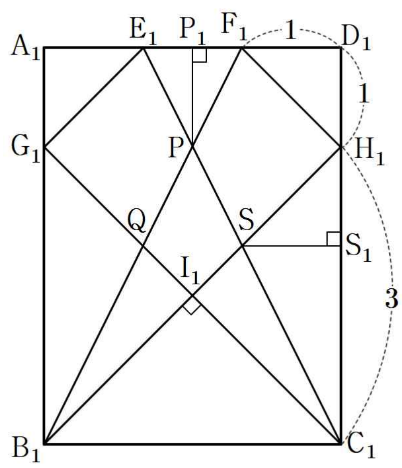
$$\overline{AC_1}=\overline{AC_2}+\overline{C_2C_1}$$
$$3=3k+2$$
$$\therefore k=\frac{1}{3}$$

따라서 $\square AB_2C_2D_2$와 $\square AB_1C_1D_1$의 닮음비는 $1:3$이고 넓이의 비는 $1:9$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi-\sqrt{5}-1}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{9\pi-9\sqrt{5}+9}{8}$$

8) [정답] ⑤

[해설]



두 점 E_1, F_1은 변 A_1D_1의 삼등분점이므로

$\overline{A_1E_1}=\overline{E_1F_1}=\overline{F_1D_1}=1$

점 P에서 변 A_1D_1에 내린 수선의 발을 P_1이라 하면

$\triangle A_1B_1F_1\backsim\triangle P_1PF_1$이고 $\overline{A_1F_1}:\overline{A_1B_1}=1:2$이므로

$\overline{P_1F_1}:\overline{P_1P}=1:2,\ \overline{P_1P}=1$

$\therefore \triangle A_1E_1G_1=\triangle E_1F_1P=\triangle F_1D_1H_1=\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\overline{B_1C_1}=\overline{C_1H_1}=3$이므로 삼각형 $B_1C_1H_1$은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 SS_1H_1도 직각이등변삼각형이므로 점 S에서

변 C_1D_1에 내린 수선의 발을 S_1, $\overline{SS_1}=a$라 하면

$\overline{S_1H_1}=a$, $\overline{S_1C_1}=3-a$

$\triangle E_1C_1D_1 \backsim \triangle SC_1S_1$이므로

$\overline{SS_1}:\overline{S_1C_1}=1:2$, $a:(3-a)=1:2$, $a=1$

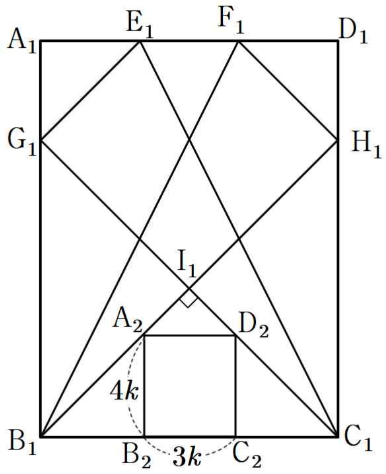
$\therefore \triangle GB_1G_1=\triangle SC_1H_1=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$ …… ㉡

삼각형 $I_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이고 $\overline{B_1C_1}=3$이므로

$\triangle I_1B_1C_1=\frac{9}{4}$ …… ㉢

따라서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이에서 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이를 제외하면 되므로

$S_1=12-\left(3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{4}$



위의 그림과 같이 $\overline{A_2B_2}=4k$라 하면

$\overline{B_2C_2}=3k$, $\overline{B_1B_2}=\frac{3-3k}{2}$

삼각형 $A_2B_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$4k=\frac{3-3k}{2}$, $k=\frac{3}{11}$

따라서 $\overline{A_2B_2}=\frac{12}{11}$이다.

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$는 닮음이고 닮음비는

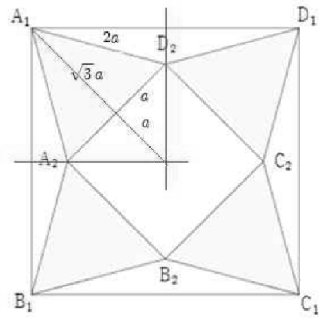
$4:\frac{12}{11}=11:3$이다.

이상에서 S_n은 첫째항이 $\frac{21}{4}$, 공비가 $\left(\frac{3}{11}\right)^2=\frac{9}{121}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21}{4}}{1-\frac{9}{121}}=\frac{363}{64}$$

9) [정답] ②

[해설]



그림에서 정삼각형의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$\sqrt{3}a+a=\sqrt{2}$

$2a=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$a^2=2-\sqrt{3}$

정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2=\sqrt{3}a^2$

$S_1=4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}-12$

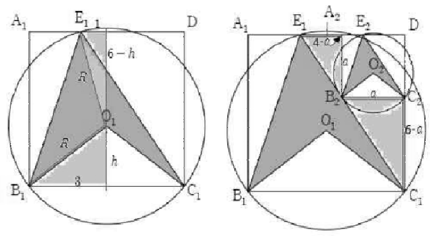
따라서 축소되는 닮음비는 a이므로

공비는 $a^2=2-\sqrt{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4\sqrt{3}a^2}{1-a^2}=\frac{8\sqrt{3}-12}{\sqrt{3}-1}=6-2\sqrt{3}$$

10) [정답] ②

[해설]



$R^2=9+h^2=1+(6-h)^2$, $h=\frac{7}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times(6-h)\times 6=11$

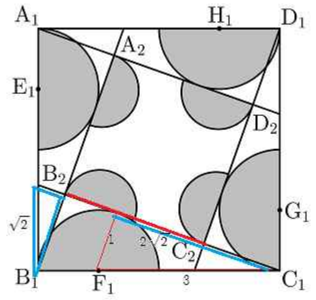
$\frac{a}{4-a}=\frac{6-a}{a}$이므로 $a=\frac{12}{5}$ㄴ

닮음비는 $r=\frac{\frac{12}{5}}{6}=\frac{2}{5}$

$$\therefore S=\frac{11}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{275}{21}$$

11) [정답] ①

[해설]



그림과 같이 원의 접선에서

직각삼각형의 변의 길이를 각각 구하면

두 번째 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$이다.

따라서 축소비율은 $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$이므로

공비는 $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)^2=1-\frac{4\sqrt{2}}{9}$이고

$S_1=2\pi$이므로 $S=\frac{2\pi}{1-\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)}=\frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$이다.

12) [정답] 19

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{5\ln x}{x-1}=-14+a$, $5=-14+a$

$\therefore\ a=19$

13) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}(e^x+1)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(ax+b)}{x}$$

$$2=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(ax+b)}{x}$$

위의 식은 $\frac{0}{0}$꼴이므로

(분자)$=\ln b=0$ $\quad\therefore b=1$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(ax+1)}{x}=\lim_{x\to0+}\ln(ax+1)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0+}\ln(ax+1)^{\frac{1}{ax}\cdot a}$$

$=a=2$

$\therefore a+b=3$

14) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(x+a)-2}{x} & (x>0)\\ x^2-3x+b & (x\le0)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서

연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$이다.

$f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=b$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{\ln(x+a)-2}{x}=b$$

위의 식에서 $x\to0+$ 일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$

이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+e^2)-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+e^2)-\ln e^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^2}\right)}{x}$$

$\frac{x}{e^2}=t$로 놓으면 $x\to0+$ 일 때 $t\to0+$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{e^2t}$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\frac{1}{e^2}\times1=\frac{1}{e^2}$$

따라서 $b=\frac{1}{e^2}$이므로

$ab=e^2\times\frac{1}{e^2}=1$

15) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos 4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{16\sin^2 4x}{16x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos 4x}$$
$$=16\times\frac{1}{2}$$
$$=8$$

16) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x(1+\cos x)}{\sin x}$$
$$=2\times 1\times(1+1)=4$$

17) [정답] 8

[해설]

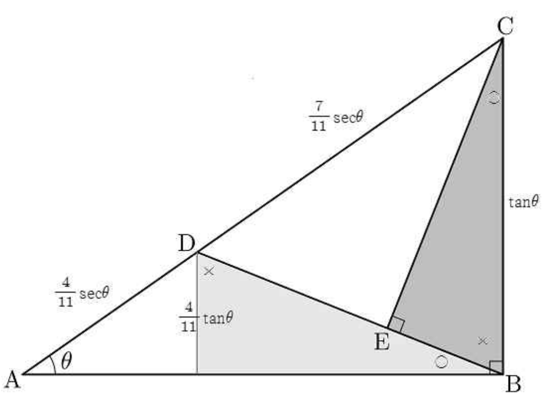
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$임을 이용하면,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}4(1+\cos x)=4\times 2=8$$

18) [정답] 9

[해설]



그림에서 삼각형 BCE, BDM은 닮음이고,

$\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta$, $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{11}\sqrt{49+16\tan^2\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{11}\tan\theta\times\left(\frac{11^2\tan^2\theta}{49+16\tan^2\theta}\right)$$
$$=\frac{14\tan^3}{49+16\tan^2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{14}{49+0}=\frac{2}{7}$$

$\therefore 2+7=9$

19) [정답] 50

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{CAB}=\theta$이므로, $\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta$

$\angle\mathrm{ABH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로, $\angle\mathrm{CBQ}=\theta$

두 삼각형 AMP와 CMP에서 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}$, $\overline{\mathrm{MP}}$는 공통, $\angle\mathrm{AMP}=\angle\mathrm{CMP}$이므로 두 삼각형 AMP와 CMP는 합동이다. 따라서 $\angle\mathrm{ACP}=\theta$이고,

$$\angle\mathrm{BCQ}=\angle\mathrm{BCA}-\angle\mathrm{ACP}=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

$$\angle\mathrm{CQB}=\pi-\angle\mathrm{BCQ}-\angle\mathrm{CBQ}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)-\theta=\frac{\pi}{2}+\theta$$

삼각형 BCQ에서 사인법칙을 쓰면

$$\frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\sin(\angle\mathrm{CBQ})}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BQC})}$$

따라서 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\frac{\sin(\angle\mathrm{CBQ})}{\sin(\angle\mathrm{BQC})}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CQ}}\times\sin(\angle\mathrm{BCQ})$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}^2\times\frac{\sin(\angle\mathrm{BCQ})\sin(\angle\mathrm{CBQ})}{\sin(\angle\mathrm{BQC})}$$
$$=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times\frac{\cos 2\theta\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta}\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 1=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$이므로, $100a=50$

20) [정답] ①

[해설]

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 BED와 삼각형 DEH는 닮음이므로

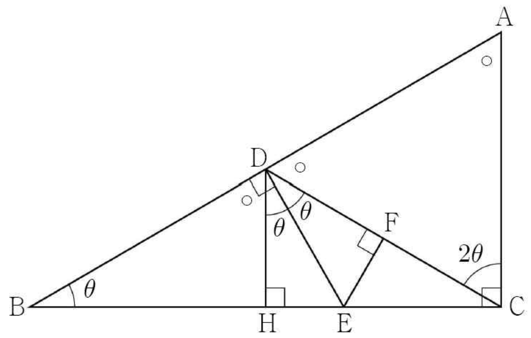
$\angle EBD = \angle EDH = \theta$

선분 AC와 선분 DH는 서로 평행하므로

$\angle ACD = \angle CDH = 2\theta$

$\angle DAC = \angle CDA = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 삼각형 CAD는 $\overline{CA} = \overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{AB} = 4$ 이므로 $\overline{CA} = \overline{CD} = 4\sin\theta$



삼각형 DHC에서

$$\overline{DH} = \overline{CD}\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos 2\theta$$

삼각형 DHE에서

$$\overline{DE} = \frac{\overline{DH}}{\cos\theta} = 4\tan\theta\cos 2\theta$$

점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 할 때,

$$\overline{EF} = \overline{DE}\sin\theta$$

삼각형 CDE의 넓이

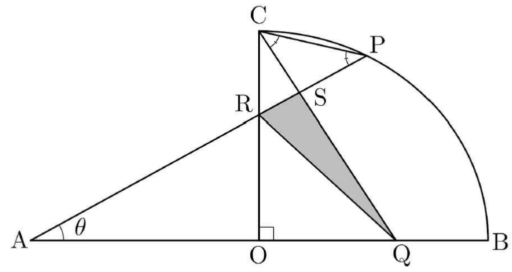
$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{EF}$$
$$= 8\sin^2\theta\tan\theta\cos 2\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{8\sin^2\theta\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^3}$$
$$= 8 \times \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \times \left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right) \times \cos 2\theta \right\}$$
$$= 8$$

21) [정답] ④

[해설]



$\triangle$OAP는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA = \theta$이고 $\angle POQ = 2\theta$이다.

$\triangle$OAP에 한 점O에서 마주보는 변CP에 수선의 발을 점 M이라 두자.

$\angle COQ = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle COP = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$이다.

이등변삼각형의 꼭짓각은 밑변을 수직이등분하므로

$\angle MOP = \dfrac{\pi}{4} - \theta$ ($\angle MOP = \angle COM = \angle ROS$····· ㉠)이고

$\triangle$OPS의 한 외각인 $\angle PSM = \dfrac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle CSP$는 $\angle PSM$의 2배이므로 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AO} = 2$이므로 $\overline{RO} = 2\tan\theta$

$\overline{CO}$의 길이는 $\overline{CO} - \overline{RO} = 2 - 2\tan\theta$

$\triangle$AOR과 $\triangle$CSR은

$\angle ORA = \angle SRC$($\because$ 맞꼭짓각)

$\angle AOR = \angle CSR = 90^\circ$

이므로 AA닮음이다.

따라서 $\angle RAO = \angle RCS = \theta$이므로 $\overline{RS} = (2 - 2\tan\theta)\sin\theta$

□SOQR의 마주보고 있는 두 각인 $\angle ROQ$와 $\angle RSQ$의 합이 π이므로 □SOQR은 원에 내접하는 사각형이다. 따라서

$\angle ROS$와 $\angle RQS$는 원주각으로 같고 $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ ($\because$ ㉠)이다.

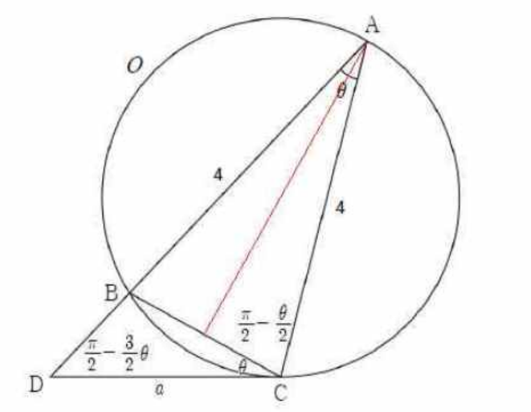
$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot (1 - \tan\theta)^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2^2 \cdot (1 - \tan\theta)^2 \cdot \sin^2\theta}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot \theta^2}$$

$= 2$

22) [정답] 8

[해설]



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=8\sin\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

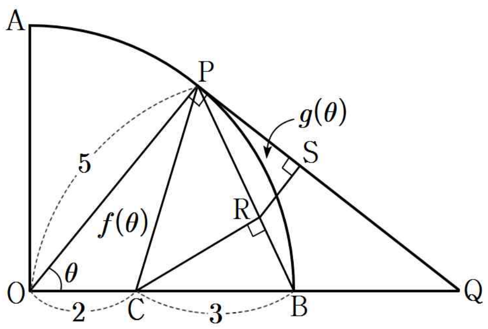
$$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta\right)},\ \overline{CD}=\frac{4\sin\theta}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{16\sin\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=8$$

23) [정답] 49

[해설]



$\overline{OC}=2,\ \overline{OP}=5$이므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times2\times5\sin\theta=5\sin\theta$ …… ㉠

삼각형 OBP는 이등변삼각형이므로

$\overline{BP}=2\times5\sin\dfrac{\theta}{2}=10\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\angle OBP=\dfrac{\pi-\theta}{2}$이므로 $\angle BCR=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{BR}=3\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\ \overline{PR}=\overline{BP}-\overline{BR}=7\sin\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉡

$\angle OPQ=\dfrac{\pi}{2}$이고 $\angle OPB=\dfrac{\pi-\theta}{2}$이므로

$\angle RPS=\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉢

$\therefore\ \overline{PS}=\overline{PR}\cos\dfrac{\theta}{2}=7\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\times7\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{49}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ …… ㉤

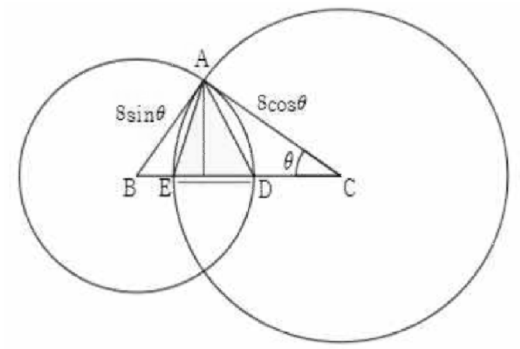
㉠, ㉤에서

$$80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$
$$=80\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{49}{2}\sin^3\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2\times5\sin\theta}$$
$$=8\times49\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2\times\sin\theta}$$
$$=8\times49\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\right)^3\times\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)}\times\frac{1}{8}$$
$$=8\times49\times\frac{1}{8}=49$$

24) [정답] ⑤

[해설]

직각삼각형의 삼각비에서



$\overline{AB}=\overline{BD}=8\sin\theta,\ \overline{AC}=\overline{CE}=8\cos\theta$

$\overline{ED}=\overline{BD}+\overline{CE}-8=8(\sin\theta+\cos\theta-1)$

그리고 삼각형의 높이는 $h=8\sin\theta\cos\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{ED}\times h=32\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)$

$$\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right)$$

여기서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=0,\ \lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=32$$

25) [정답] ①

[해설]

$\triangle ABP$에서 $\angle ABP=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AP}=2\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{BP}=2\cos\frac{\theta}{2}$

$\triangle$AOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_1,

$\triangle$BOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면

사인법칙에 의하여

$R_1=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$이고 $f(\theta)=\pi\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$R_2=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$이고 $g(\theta)=\pi\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to 0+$

따라서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}=\lim_{t\to 0+}\frac{\pi\sin t}{t\cos^2 t}=\pi$

26) [정답] 75

[해설]

원주각의 성질에 의해 $\angle OBQ=3\theta$이므로 $\angle RBS=3\theta$

$\therefore\ \angle PRB=2\theta$

삼각형 APB에서 $\angle APB=90^\circ$이므로 $\overline{BP}=2\sin\theta$

$\therefore\ \overline{BR}=\frac{2\sin\theta}{\sin 2\theta}$

따라서 직각삼각형 RBS에서

$\overline{BS}=\frac{2\sin\theta\cos 3\theta}{\sin 2\theta}$, $\overline{RS}=\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$

이므로 삼각형 RBS의 넓이

$S(\theta)=\frac{2\sin^2\theta\sin 3\theta\cos 3\theta}{\sin^2 2\theta}$

$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{2\times1\times3\times1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 50p=50\times\frac{3}{2}=75$

27) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\tan\frac{1}{2}x}$의

값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^3+ax^2+bx+c)=c=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\tan\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ax^2+bx}{\tan\frac{1}{2}x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{1}{2}x}{\tan\frac{1}{2}x}\times(x^2+ax+b)\right\}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\tan\frac{1}{2}x}\times\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)$$

$$=2\times1\times b$$

$$=2b=6$$

따라서 $b=3$

$f'(x)=3x^2+2ax+3$이고, 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=22$이므로 $f'(1)=3+2a+3=22$에서 $a=8$

따라서 $f(x)=x^3+8x^2+3x$이므로

$f(1)=1+8+3=12$

28) [정답] ②

[해설]

$\frac{g(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}\times\sin x$인데, 여기서 $\sin x$는 진동발산한다.

$x\to\infty$일 때, $\frac{g(x)}{x^2}$이 0으로 수렴하려면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$이다.

따라서 $f(x)=ax+b$와 같이 일차이하의 다항식이다.

$g(x)=(ax+b)\sin x$에서

$g'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$

$\frac{g'(x)}{x}=a\frac{\sin x}{x}+\left(a+\frac{b}{x}\right)\cos x$인데,

이것이 $x\to 0$일 때 6으로 수렴하려면

$b=0,\ 2a=6$

$\therefore\ f(x)=3x,\ f(4)=12$

29) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+3x^2}=2$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 사차함수이다.

또, 조건 (나)에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다. 한편,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin x+\tan x)(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{(\sin x+\tan x)(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{(\sin x+\tan x)\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\times(1+\cos x)\times\frac{f(x)}{x^3}\right\}$$

이 극한값이 0이 아니므로 $f(x)=2x^4+ax^3$ (a는 0아닌 상수)의 꼴이어야 한다.

이 함수를 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\times(1+\cos x)\times\frac{2x^4+ax^3}{x^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{(1+1)\times 1^2}\times 2\times a$$

$=a=3$

따라서 $f(x)=2x^4+3x^3$이므로

$f(1)=2+3=5$

30) [정답] ④

[해설]

$f(x)=x^3+e^{2x-4}$에서

$f'(x)=3x^2+2e^{2x-4}$

$\therefore\ f'(2)=3\times 2^2+2e^{2\times 2-4}$

$=12+2=14$

31) [정답] 17

[해설]

$f(x)=(2x+1)e^{3x-6}$에서

$f'(x)=2e^{3x-6}+3(2x+1)e^{3x-6}$

따라서 $f'(2)=2+3\times 5=17$

32) [정답] 12

[해설]

$f'(x)=3(3+e^x)(3x+e^x)^2$

$f'(0)=3\times 4\times 1=12$

33) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=\frac{e^x}{\sin x+\cos x}$의 양변을 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

조건에서 $f(x)=f'(x)$이므로

$$\frac{e^x}{\sin x+\cos x}=\frac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2},$$

$2\sin x=\sin x+\cos x$

$\therefore \sin x=\cos x$

즉 $\tan x=1$이므로 $x=\frac{\pi}{4}\left(\because\ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi\right)$

34) [정답] ④

[해설]

$f(x)=2^x+2^{2x}$에서

$$f'(x)=2^x\ln 2+2\times 2^{2x}\ln 2$$
$$=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$$

$f'(x)=36\ln 2$에서

$$(2^x+2^{2x+1})\ln 2=36\ln 2$$
$$2^x+2^{2x+1}=36$$
$$2\cdot 2^{2x}+2^x-36=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고

$$2t^2+t-36=0,\ (t-4)(2t+9)=0$$
$$t=4\ (\because t>0)$$

$2^x=4$에서 구하는 x의 값은 $x=2$

35) [정답] ③

[해설]

$f(x)=\dfrac{e^x}{1+\csc x}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x\times(1+\csc x)-e^x\times(-\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$$
$$=\frac{e^x(1+\csc x+\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$$

방정식 $f(x)=f'(x)$에서

$$\frac{e^x}{1+\csc x}=\frac{e^x(1+\csc x+\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$$

양변에 $\dfrac{(1+\csc x)^2}{e^x}$을 곱하여 정리하면

$\csc x\cot x=0,\ \dfrac{1}{\sin x}\times\dfrac{\cos x}{\sin x}=0$

$0<x<\pi$에서 $\cos x=0$이므로 $x=\dfrac{\pi}{2}$

36) [정답] 11

[해설]
음함수의 미분법에서

$$2x+3y^2\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}+9=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y+9}{2x-3y^2}=\frac{2\times 2-2\times 1+9}{2\times 2-3\times 1}=11$$

37) [정답] ①

[해설]

$x^2+3xy^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+3y^2+3x\times 2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y^2}{6xy}\ (\text{단, } xy\neq 0)$$

위의 식에 $x=1,\ y=1$을 대입한 값이 곡선 $x^2+3xy^2=4$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기이므로 구하는 접선의 기울기는 $-\dfrac{5}{6}$이다.

38) [정답] ①

[해설]

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+9y^2\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y}{2x-9y^2}=\frac{4+2}{4-9}=-\frac{6}{5}$$

39) [정답] ①

[해설]

$$f(x)=\frac{6x^3}{x^2+1},\ f'(x)=\frac{6x^4+18x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$f(1)=3,\ g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

40) [정답] $\dfrac{1}{3}$

[해설]
$f(2)=1$에서 $f^{-1}(1)=2$이므로

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3}$$

41) [정답] ③

[해설]
$x^{\ln x}=e^4$의 양변에 자연로그를 취하여 계산하면 $x=e^2$, 즉 $f(e^2)=e^4$
$f(x)=x^{\ln x}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면
$\ln|f(x)|=\ln|x^{\ln x}|=(\ln x)^2$
양변을 x에 대하여 미분하면
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2\ln x}{x},\ f'(x)=f(x)\times\dfrac{2\ln x}{x}$이므로

$f'(e^2)=f(e^2)\times\frac{2\ln e^2}{e^2}=e^4\times\frac{4}{e^2}=4e^2$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$\frac{1}{g'(e^4)}=f'(e^2)=4e^2$이다.

42) [정답] ③

[해설]

$k(x)=(h\circ g)(x)$라 하면 $k(x)=e^{g(x)}$이고,

$k'(x)=e^{g(x)}\times g'(x)$ …… ㉠

$g(5)=a$라 하면 $f(a)=5$에서

$a^3+3a+1=5,\ a^3+3a-4=0$

$(a-1)(a^2+a+4)=0$

$a=1$이므로 $g(5)=1$

$f'(x)=3x^2+3$에서 $g'(5)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$

따라서 ㉠에서 $k'(5)=e^{g(5)}\times g'(5)=\frac{e}{6}$이다.

43) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$이므로, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 f의 역함수 g가 존재하고, $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하여 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이다.

$g(3)=a$라 하면, $f(a)=3$이다.

$a^3+a^2+a-3=0$에서 $(a-1)(a^2+2a+3)=0$이다.

$a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$이므로, $a=1$이다.

$h(x)=f(2g(x))$에서

$h'(x)=f'(2g(x))\times 2g'(x)$

$=f'(2g(x))\times\frac{2}{f'(g(x))}$

$h'(3)=f'(2g(3))\times\frac{2}{f'(g(3))}$

$=f'(2)\times\frac{2}{f'(1)}$

$=17\times\frac{2}{6}=\frac{17}{3}$

44) [정답] ①

[해설]

$f(0)=1,\ f(1)=2$이므로

$g(1)=0,\ g(2)=1$

또, $f'(0)=2,\ f'(1)=3$이므로

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}$

$=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$

$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}$

$=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$

$h(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))$에서

$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(2)=g'(g(2))g'(2)$

$=g'(1)g'(2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

45) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\ln(2x^2+2x+1)\,(x>0)$라 두자

$g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

$g(x)$와 $y=t$가 만나는 x좌표를 $f(t)$이면 $g(f(t))=t$이다.

$g(f(2\ln 5))=2\ln 5=\ln 25$

$f(2\ln 5)=k$라 치환하면 $g(k)=\ln 25$

$\ln(2k^2+2k+1)=\ln 5,\ 2k^2+2k+1=5$

$k^2+k-12=0\,(k>0)$

$\therefore k=3$

$g(f(t))=t$를 t에 대해 미분하면 $g'(f(t))\cdot f'(t)=1$

$\therefore f'(2\ln 5)=\frac{1}{g'(f(2\ln 5))}$

$=\frac{1}{g'(3)}$

$=\frac{18+6+1}{14}$

$=\frac{25}{14}$

46) [정답] ②

[해설]

$x^3+2x^2-15x+5=t$에서 양변을 t에 대해 미분하면

$(3x^2+4x-15)\dfrac{dx}{dt}=1$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3x^2+4x-15}$

즉,

$f'(t)=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3\{f(t)\}^2+4\{f(t)\}-15}$,

$g'(t)=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3\{g(t)\}^2+4\{g(t)\}-15}$

$t=5$일 때 x의 값을 구해보면

$x^3+2x^2-15x+5=5$

$x(x+5)(x-3)=0$

$x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

즉 $f(5)=3$, $g(5)=-5$

따라서

$f'(5)=\dfrac{1}{3\cdot 3^2+4\cdot 3-15}=\dfrac{1}{24}$

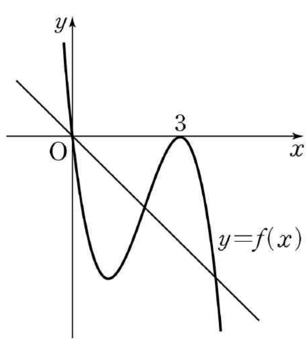
$g'(5)=\dfrac{1}{3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15}=\dfrac{1}{40}$

47) [정답] ⑤

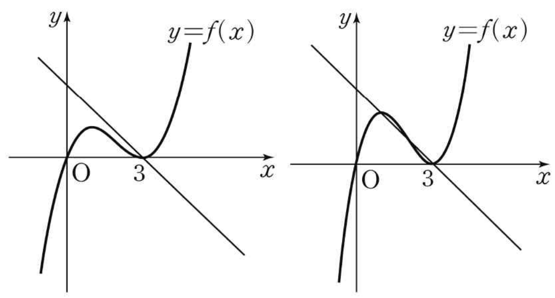
[해설]

[단계 1] 삼차함수의 그래프의 개형과 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

함수 $f(x)=ax(x-3)^2$의 그래프는 항상 극값이 존재하므로 $a<0$이면 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 지나고 기울기가 -1인 직선은 곡선 $y=f(x)$와 항상 세 점에서 만난다.



따라서 $a>0$이어야 한다.



모든 실수 t에 대하여 직선 $y=-x+t$와 곡선 $y=f(x)$가 항상 한 점에서만 만나려면 $f'(x)=-1$을 만족시키는 실수 x의 개수가 1 이하이어야 한다.

$a>0$일 때 $f(x)=a(x^3-6x^2+9x)$이므로

$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$

이때 이차방정식 $3ax^2-12ax+9a=-1$, 즉 $3ax^2-12ax+9a+1=0$의 판별식 D가 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=36a^2-27a^2-3a=9a^2-3a\le 0$

$\therefore\ 0<a\le\dfrac{1}{3}\ (\because\ a>0)$

따라서 실수 a의 최댓값 p는 $p=\dfrac{1}{3}$이고, 이때 $f(x)=\dfrac{1}{3}x(x-3)^2$이다.

[단계 2] 함수 $g(t)$의 정의를 이용하여 α, β의 값을 구한다.

직선 $y=-x+t$와 곡선 $y=\dfrac{1}{3}x(x-3)^2$이 만나는 점의 x좌표가 $g(t)$이므로

$-g(t)+t=\dfrac{1}{3}g(t)\{g(t)-3\}^2$ …… ㉠

한편, $h=g^{-1}$이므로 방정식 $h(t)=t$의 실근은 방정식 $g(t)=t$의 실근과 같다.

㉠의 $g(t)$ 대신 t를 대입하면 방정식

$-t+t=\dfrac{1}{3}t(t-3)^2$, 즉 $0=\dfrac{1}{3}t(t-3)^2$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=3$

$\therefore\ \alpha=0$, $\beta=3$

[단계 3] 역함수의 정의와 역함수의 미분법을 이용하여 $g'(\alpha)$, $h'(\beta)$의 값을 구한다.

㉠에서 $t=\dfrac{1}{3}\{g(t)\}^3-2\{g(t)\}^2+4g(t)$이고,

$g(t)=s$라 하면 $t=h(s)$이므로

$h(s)=\frac{1}{3}s^3-2s^2+4s$, 즉 $h(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t$ 이다.

따라서 $h'(t)=t^2-4t+4$ 이므로

$$h'(\beta)=h'(3)=1$$

한편, $g(0)=0$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(\alpha)=g'(0)=\frac{1}{h'(g(0))}=\frac{1}{h'(0)}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ g'(\alpha)+h'(\beta)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

[다른 풀이]

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$-g'(t)+1=\frac{1}{3}g'(t)\{g(t)-3\}^2+\frac{2}{3}g(t)\{g(t)-3\}g'(t) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 $t=0$을 대입하면

$$-g'(0)+1$$

$$=\frac{1}{3}g'(0)\{g(0)-3\}^2+\frac{2}{3}g(0)\{g(0)-3\}g'(0)$$

이때 $g(0)=0$ 이므로

$$-g'(0)+1=\frac{1}{3}g'(0)(-3)^2+0$$

$$\therefore\ g'(\alpha)=g'(0)=\frac{1}{4}$$

㉡에 $t=3$을 대입하면

$$-g'(3)+1=\frac{1}{3}g'(3)\{g(3)-3\}^2+\frac{2}{3}g(3)\{g(3)-3\}g'(3)$$

이때 $g(3)=3$ 이므로

$$-g'(3)+1=0 \quad \therefore\ g'(3)=1$$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$h'(\beta)=h'(3)=\frac{1}{g'(h(3))}=\frac{1}{g'(3)}=\frac{1}{1}=1$$

48) [정답] 6

[해설]

$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{2}\cos t-2\sqrt{2}\sin t$

$t=\frac{\pi}{4}$ 이면 $x=3$, $y=3$, $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=-1$ 이므로

접선은 $y-3=-(x-3)$, $\therefore y$절편은 6 이다.

49) [정답] ①

[해설]

$t=1$일 때 $x=1$, $y=0$이므로 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

$x=1+\ln t$, $y=\frac{t^2-1}{2t}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t\times 2t-(t^2-1)\times 2}{(2t)^2}=\frac{2t^2+2}{4t^2}=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

이므로

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

$t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{1+1}{2}=1$

접선의 방정식은 $y=1\times(x-1)+0$에서 $y=x-1$

따라서 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로

$$k=-1$$

50) [정답] ①

[해설]

주어진 곡선 위의 점 중 $t=1$에 대응하는 점을 P라 하자.

$x=e^t+\ln t$에 $t=1$을 대입하면 $x=e$,

$y=e^{2t}-2t$에 $t=1$을 대입하면 $y=e^2-2$이므로

$\mathrm{P}(e,\ e^2-2)$

한편 $\frac{dx}{dt}=e^t+\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}-2}{e^t+\frac{1}{t}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 P에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=1$을 대입한 값과 같으므로

$$\frac{2e^2-2}{e+1}=\frac{2(e+1)(e-1)}{e+1}=2(e-1)$$

즉 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(e^2-2)=(2e-2)(x-e)$

$y=(2e-2)(x-e)+e^2-2$

따라서 점 $\left(\frac{1}{2}e,\ k\right)$가 직선 $y=(2e-2)(x-e)+e^2-2$ 위의 점이므로

$k=(2e-2)\left(\frac{1}{2}e-e\right)+e^2-2$

$=e-2$

51) [정답] ⑤

[해설]

$x^2=x+2$에서 $x^2-x-2=0$이므로

$\therefore\ x=-1$ 또는 2

곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$라 하자.

한편, 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $y'=2x_1$이므로 점 A$(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $2\times(-1)=-2$

점 B$(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $2\times(-1)=-2$

점 B$(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $2\times2=4$

$\therefore\ \tan\theta=\left|\frac{(-2)-4}{1+(-2)\times4}\right|=\frac{6}{7}$

52) [정답] ⑤

[해설]

$\sqrt{x}=\frac{8}{x}$에서 $(\sqrt{x})^3=2^3$이므로

$\sqrt{x}=2$ $\qquad\therefore\ x=4$

따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $g'(x)=-\frac{8}{x^2}$이므로 두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=f'(4)=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=g'(4)=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{6}{7}$

53) [정답] 9

[해설]

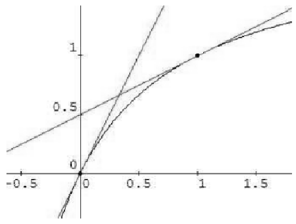
$f(x)=\frac{2x}{x+1}=2-\frac{2}{x+1}$

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

$f'(0)=2,\ f'(1)=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 12\tan\theta=9$



54) [정답] ④

[해설]

$f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^x$,

$f'(x)=(2x+1)e^{2x}-(4x+a+4)e^x$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $a=-2$

따라서 $f'(x)=(2x+1)e^x(e^x-2)$이고

극솟값은 $f(\ln2)=4-4\ln2$이다.

55) [정답] ①

[해설]

$f(x)=e^x(x^2-2x+a)$에서

$f'(x)=e^x(x^2-2x+a)+e^x(2x-2)$
$=e^x(x^2+a-2)$

$f''(x)=e^x(x^2+a-2)+e^x\times2x$
$=e^x(x^2+2x+a-2)$

$x=a$에서 함수 $f(x)$는 극댓값 M을 가지므로

$f'(a)=e^a(a^2+a-2)=0$

$e^a>0$이므로 $a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$a=-2$ 또는 $a=1$

$a=1$일 때, $f''(1)=2e>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

$a=-2$일 때, $f''(-2)=-4e^{-2}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, 극댓값 $M=e^{-2}(4+4-2)=\dfrac{6}{e^2}$

따라서 $aM=(-2)\times\dfrac{6}{e^2}=-\dfrac{12}{e^2}$

56) [정답] ②

[해설]

$f(x)=(x^2+a)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x$
$\quad=e^x(x^2+2x+a)$

이때 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=0$에서

$e^2(4+4+a)=0$

$\therefore\ a=-8$

즉, $f'(x)=e^x(x^2+2x-8)=e^x(x+4)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=2$

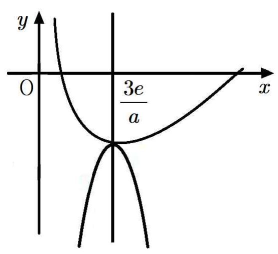
따라서 함수 $f(x)$는

$x=-4$에서 극댓값 $f(-4)$를 가지므로

$f(-4)=\{(-4)^2-8\}e^{-4}=\dfrac{8}{e^4}$

57) [정답] ③

[해설]



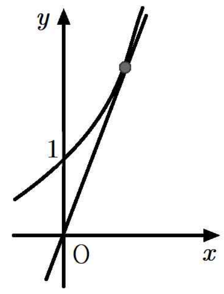
$g(x)=-ax^2+6ex+b$라 하면
$g'(x)=-2ax+6e$ 즉, $g'(x)=0$인
점 $x=\dfrac{3e}{a}$에서 극대가 된다.

$h(x)=a(\ln x)^2-6\ln x$라 하면

$h'(x)=\dfrac{2a\ln x}{x}-\dfrac{6}{x}$ 즉 $h'(x)=0$인 점 $\ln x=\dfrac{3}{a}$,

$x=e^{\frac{3}{a}}$에서 극소가 된다.

따라서 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\dfrac{3e}{a}$이고, (가), (나)조건에서 $e^{\frac{3}{a}}=\dfrac{3e}{a}$



$\dfrac{3}{a}=x$라 하면 $y=e^x$와 $y=ex$의
그래프는 그림과 같이 $e^x\ge ex$이고
등호는 $x=1$일 때 성립한다.

그러므로 $\dfrac{3}{a}=1$

$\therefore a=3,\ c=e \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 식에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex+b & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

(가)조건에서 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=e$에서도 연속이어야 한다.

$-3e^2+6e^2+b=3-6$

$\therefore b=-3-3e^2$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex-3-3e^2 & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-3\left(\dfrac{1}{4e^2}\right)+\dfrac{6e}{2e}-3-3e^2$

$=-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

58) [정답] **64**

[해설]

조건(가)에서 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 극한값과 함숫값이 같아야 되고 $g(0)\neq0$이면 $f(0)\neq0$이어야 된다.

$x=0$일 때 $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=-f(0)$이고 $g(0)=f(0)$이므로

$-f(0)=f(0)$

$\therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=2$일 때 $\lim\limits_{x\to2-}g(x)=f(2)$이고 $g(2)=f(2)$이므로

$f(2)=f(2)$

$x=2$에서 항상 연속이다.

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x\le2)\\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0\ \text{또는}\ x>2)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (0\le x\le2)\\ \dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2} & (x<0\ \text{또는}\ x>2)\end{cases}$$

$x=0$일 때 $\lim\limits_{x\to0+}g'(x)=f'(0)$이고,

$$\lim_{x\to 0-} g'(x) = -f'(0) - f(0) = -f'(0) \,(\because\ f(0)\neq 0)$$

$x=2$일 때 $\lim_{x\to 2+} g'(x) = f'(2) - f(2)$이고

$$\lim_{x\to 2-} g'(x) = f'(2)$$

$$f'(2)-f(2)\neq f'(2) \,(\because\ f(2)\neq 0)$$

따라서 $x=2$에서 미분불가능하다.

조건(나)에서 $x=a$에 미분불가능한 x값이 1개이므로 $x=0$에서 미분불가능해야 된다.

$$\therefore f'(0) = -f'(0)$$

$$\therefore f'(0)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^2(x-\alpha)(\alpha\neq 0)$

조건 (다)에 따라 $g(k)=0$이면 $f(k)=0$이다.

이때 $k=0$ 또는 $k=\alpha$인데 $g'(0)=0$이므로 $k=\alpha$이어야 한다.

(ⅰ) $0\leq\alpha\leq 2$일 때, $f'(\alpha)=\dfrac{16}{3}$, $\alpha^2=\dfrac{16}{3}$,

$$\therefore \alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha>2$이므로 모순

(ⅱ) $\alpha<0$, $2<\alpha$일 때

$$\frac{(\alpha-1)f'(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}=\frac{16}{3}$$

$$\therefore 3\alpha^2-16\alpha+16=0$$

$$\therefore \alpha=4$$

$$\therefore f(x)=x^2(x-4)$$

$\lim_{x\to 2-} g'(x)<0$, $\lim_{x\to 2+} g'(x)>0$이므로 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

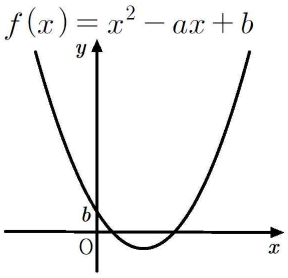
$$\therefore g(2)=-8,\ p=-8$$

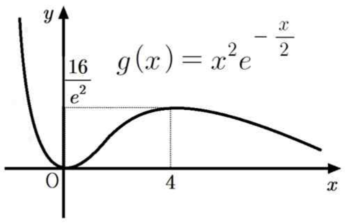
$$\therefore p^2=64$$

59) [정답] 6

[해설]

$f(x)=x^2-ax+b$





$g(x)$는 극솟값 $g(0)=0$, 극댓값 $g(4)=\dfrac{16}{e^2}$을 갖고,

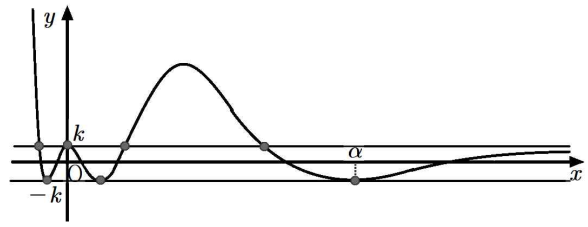
$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$가 된다.

(가) $h(0)=f(0)=b$, $h(4)=f\left(\dfrac{16}{e^2}\right)=\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$이고

$h(0)<h(4)$이므로 $b<\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$

$$0<a<\frac{16}{e^2}\left(\because\ a>0\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나)를 만족시키려면 $h(x)=f(g(x))$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



또, $f'(x)=2x-a$, $g'(x)=\dfrac{1}{2}x(4-x)e$이므로

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$=\frac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\{2g(x)-a\}$$

$g(x)=\dfrac{a}{2}$, 즉 $\alpha=\dfrac{a}{2}\left(㉠에서\ 0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{8}{e^2}\right)$에서 $h(x)$는 극솟값이 된다.

따라서 $-k=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$이어야 하므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$에서 $b-\dfrac{a^2}{4}=-k$

그런데 $f(0)=k=b$이므로 $\dfrac{a^2}{4}=2b$, 즉 $b=\dfrac{a^2}{8}$ $\cdots\cdots$ ㉡

한편 $f(1)=1-a+b=1-a+\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{7}{32}$이므로

$$4a^2-32a+39=0,\ (2a-13)(2a-3)=0$$

㉠에서 $0<a<\dfrac{16}{e^2}$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$

$\cdots\cdots$ ㉢

㉡에 대입하면 $b=\dfrac{9}{32}$

따라서 ㉡, ㉢에서 $a+16b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}-=6$

60) [정답] 24

[해설]

사차함수 $g(x)$의 최솟값이 0이므로 사차함수 $y=g(x)$의

그래프는 x축에 접한다.

한편, $f(x)=7x^ne^{-x}$에서

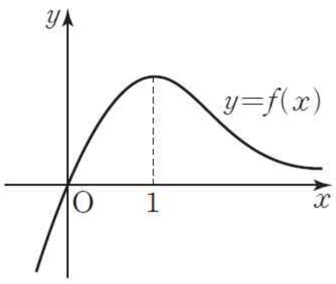
$$f'(x)=\frac{7nx^{n-1}e^x-7x^ne^x}{e^{2x}}=\frac{7x^{n-1}(n-x)}{e^x}$$

(i) $n=1$일 때

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

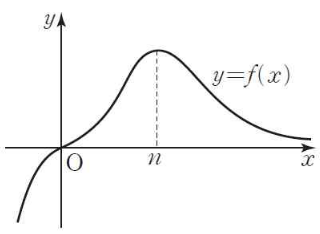


(ii) n이 1이 아닌 홀수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

$x=0$ 또는 $x=n$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	극대	↘

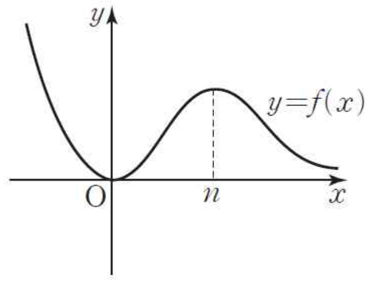


(iii) n이 짝수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

$x=0$ 또는 $x=n$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘



$h(x)=g(f(x))=0$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $g(t)=0$이므로

방정식 $g(t)=0$의 한 근을 $t=\alpha$라 하면

$f(x)=\alpha$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$와 만나는 점의 x좌표가 모두 0보다 크거나 같아야 하므로 자연수 n은 홀수이고, 그 점이 최대 두 개이므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 방정식 $g(t)=0$이 적어도 2개 이상의 0보다 크거나 같은 실근을 가져야 한다.

한편, 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이고 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ (0\le\alpha<\beta)$
…… ㉠

또, 조건 (다)에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $h'(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$에서

(i) $n=1$일 때

$f(0)=0,\ f'(0)\neq0$이므로 $h'(0)=0$이기 위해서는 $g'(0)=0$

또, $f'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 $+$에서 $+$가 되므로 $g'(f(x))$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.

즉, ㉠에서 $\alpha=0$이고, $g(x)=x^2(x-\beta)^2$

(ii) n이 1이 아닌 홀수일 때

$f'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 $+$에서 $+$가 되므로 $g'(f(x))$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.

즉, ㉠에서 $\alpha=0$이고, $g(x)=x^2(x-\beta)^2$

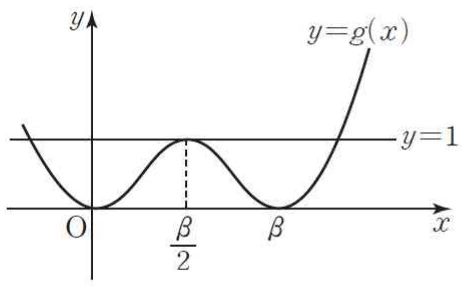
(i), (ii)에 의하여 $g(x)=x^2(x-\beta)^2\ (\beta>0)$

$$\begin{aligned}g'(x)&=2x(x-\beta)^2+2x^2(x-\beta)\\&=2x(x-\beta)(2x-\beta)\end{aligned}$$

이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

방정식 $g(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위해서는 함수 $g(x)$의 극댓값이 1이어야 한다.



즉, $g\left(\frac{\beta}{2}\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}-\beta\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^4}{2^4}=1$

$\beta^4=2^4$이고 $\beta>0$이므로 $\beta=2$

그러므로 $g(x)=x^2(x-2)^2$에서

$g'(x)=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=2x(x-2)(2x-2)$

$=4x(x-1)(x-2)$ …… ㉡

$h(x)=g(f(x))$에서 $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$이고,

$h''(x)=g''(f(x))\times f'(x)\times f'(x)+g'(f(x))\times f''(x)$

$f(0)=0$이므로

$h''(0)=g''(0)\times\{f(0)\}^2+g'(0)\times f''(0)$

이때 $n=1$이면 $f(x)=7xe^{-x}$에서 $f'(0)=7$이므로

$g'(0)=0, g''(0)=8$에서 $h''(0)\neq 0$이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이고, ㉡에서

$g'(3)=4\times 3\times 2\times 1=24$

61) [정답] ④

[해설]

함수 $|g(|x|)|=\begin{cases}|g(-x)| & (x<0)\\ |g(x)| & (x\geq 0)\end{cases}$ 에서 $y=|g(|x|)|$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이 때, 조건 (가)에서 함수 $|g(|x|)|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2 이므로 함수 $|g(|x|)|$는

$x<0$ 에서 미분가능하지 않은 점의 개수가 1

$x>0$ 에서 미분가능하지 않은 점의 개수가 1

이어야 한다. 즉, 함수 $|g(|x|)|$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$g'(0)=0$ 이어야 한다.

그런데 $g(x)=f(e^{-x})$에서 $g'(x)=-e^{-x}f'(e^{-x})$, $g'(0)=-f'(1)$

이므로 $f'(1)=0$이다.

또, $x>0$에서 함수 $|g(|x|)|$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수가 1 이므로

방정식 $g(x)=0$의 근이 한 개 존재해야 한다.

이 때, $t=e^{-x}$ 라 하면 $0<t<1(\because x>0)$ 이므로

$g(x)=0$ 에서

$f(e^x)=f(t)=0$ (단, $0<t<1$)

즉, 방정식 $f(x)=0$의 근이 $0<x<1$ 에서 한 개 존재해야 한다.

$f'(1)=0$ 이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-a)=3x^2-3(a+1)x+3a$ (단, a는 상수)

로 놓을 수 있다.

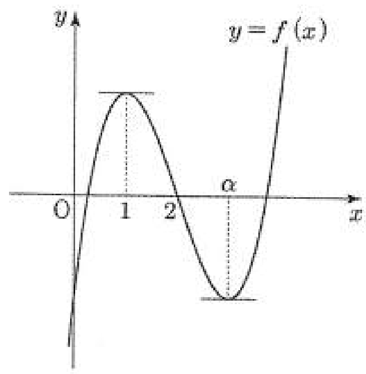
따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+1)x^2+3ax+C$ (단, C는 적분상수)

그런데 $f(2)=0$ 이므로

$8-6(a+1)+6a+C=0$

$2+C=0$ 에서 $C=-2$이다.

즉,



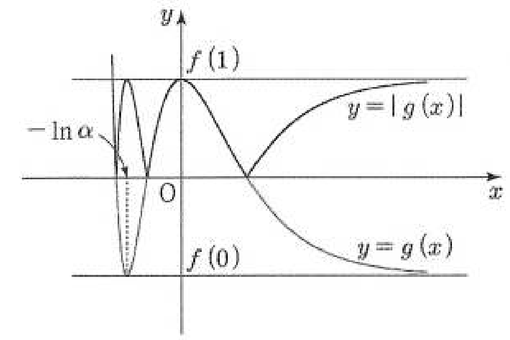
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+1)x^2+3ax-2$이고, $f(0)=-2<0$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은

오른쪽 그림과 같다.

이 때, 방정식 $|g(x)|=-f(0)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이려면 $y=|g(x)|$의 그래프가 아래 그림과 같아야 하므로

$f(1)=-f(\alpha)=-f(0)=2$ 이어야 한다.



곧, $\alpha=3$이고, $f(1)=2$에서

$1-\frac{3}{2}(a+1)+3a-2=2,\ \ \frac{3}{2}a-\frac{5}{2}=2$ 이므로 $a=3$이다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 이므로 구하는 값은

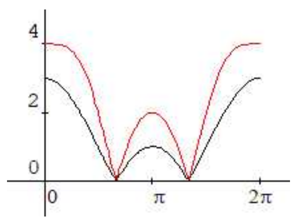
$f(5)=5^3-6\times5^2+9\times5-2=18$

62) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $g(x)=|2\cos x+1|$와

$h_1(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프는 그림과 같다.



$x=\frac{2}{3}\pi,\ x=\frac{4}{3}\pi$에서

$h_1(x)$는 미분가능하지 않다.

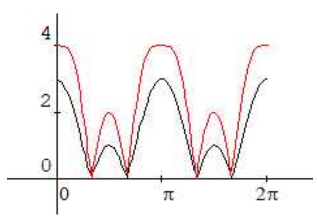
ㄴ. $g(x)=|2\cos(2x)+1|$와

$h_2(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프에서

$h_2(x)=2$의 실근은 $g(x)=1$

즉, $\cos(2x)=0$ 또는 $\cos(2x)=-1$

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ --- 6개이다.



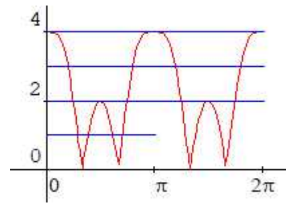
ㄷ. $y=|h_1(x)-1|$에서 $a_1=6$

$h_2(x)=h_1(2x)$이므로 $a_2=8$

$h_3(x)=h_1(3x)$이므로 $a_3=12$

$h_4(x)=h_1(4x)$이므로 $a_4=8$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}a_k=6+8+12+8=34$



63) [정답] ②

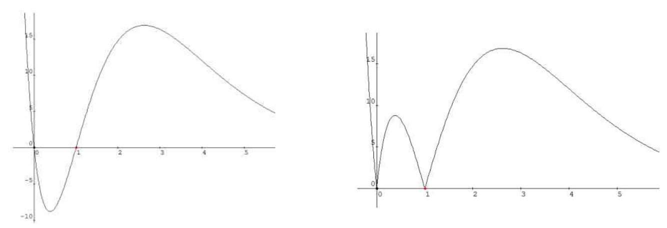
[해설]

$y=(x^2-x)e^{4-x}=x(x-1)e^{4-x}$

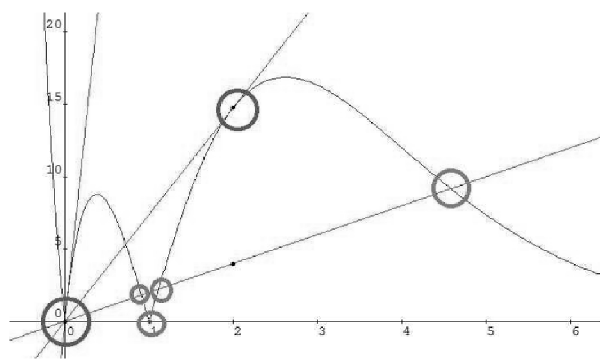
$y'=(2x-1)e^{4-x}-(x^2-x)e^{4-x}=(-x^2+3x-1)e^{4-x}$

$\lim(x^2-x)e^{4-x}=0$이다. 이것으로 부터 $y=(x^2-x)e^{4-x}$,

$f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이제 $y=kx(k>0)$와 $y=f(x)$에서 $g(x)$를 살펴보면 아래 그림과 같이 $y=kx$가 $y=f(x)$의 접선인 경우를 기준으로 동그라미에서 미분가능하지 않은 경우가 생긴다.



ㄱ. $k=2$이면 $f(2)=2e^2>4$이므로 $g(2)=4$

ㄴ. $y=kx$가 $x=2$에서 $y=f(x)$의 접선보다 아래쪽이면 $h(k)$는 최댓값 4를 갖는다.

ㄷ. 원점에서 접선을 구하여 보면 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 두면

$y=(-t^2+3t-1)e^{4-t}(x-t)+(t^2-t)e^{4-t}$

$0=(t^3-3t^2+t)e^{4-t}+(t^2-t)e^{4-t}$

$t^3-2t^2=0,\ t=0$ 또는 $t=2$

$t=2$에서 접선의 기울기는 $k=e^2$

$t=0$에서는 $y=-f(x)$의 접선의 기울기는 $k=e^4$

따라서 $e^2 \le k < e^4$, $k > e^4$일 때 $h(k)=2$이다.

64) [정답] 4

[해설]

조건 (가)의 $\lim_{x\to 0-} g(x)=2$에서

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x+1)}{x}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\lim_{x\to 0-} f(x+1)=0$에서 $f(1)=0$

$f(x)=-2(x-1)(x-\alpha)$라 하면 ㉠에서

$$\lim_{x\to 0-}\frac{-2x(x+1-\alpha)}{x}=-2(1-\alpha)=2,\ \alpha=2$$

$\therefore f(x)=-2(x-1)(x-2),\ f'(x)=-4x+6$

$x>0$일 때, $g'(x)=f'(x)e^{x-a}+f(x)e^{x-a}$이므로

$g'(a)=f'(a)+f(a)$

조건 (가)에서 $g'(a)=-2$이므로

$f'(a)+f(a)=-2a^2+2a+2=-2$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

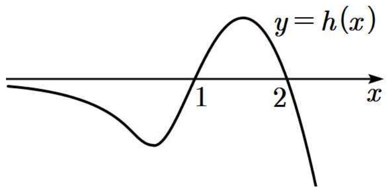
$$\therefore g(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<0)\\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2}+b & (x\ge 0)\end{cases}$$

$h(x)=-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$이라 하면

$h'(x)=-2(2x-3)e^{x-2}-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$

$\quad =-2(x^2-x-1)e^{x-2}$

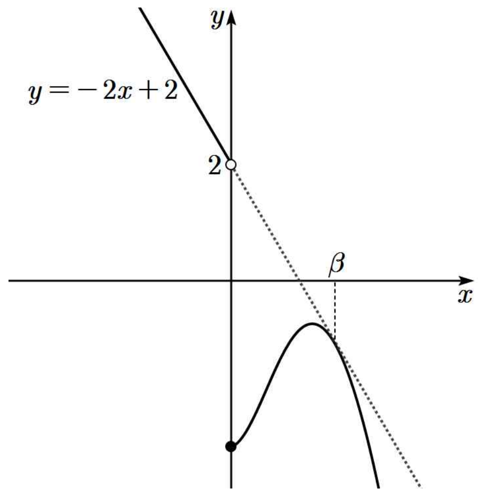
함수 $h(x)$는 2개의 극값을 가지므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x\ge 0$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

조건 (나)에서 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}$는 두 점 $(s,\ g(s))$, $(t,\ g(t))$을 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

$x<0$일 때 함수 $g(x)=-2x-2$이므로 조건 (나)의 부등식을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같이 $x\ge 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접하거나 아래쪽에 존재해야 한다.



따라서 b가 최대일 때는 $x\ge 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때이다. 이때, 접점의 x좌표를 $\beta\,(\beta>0)$라 하면

$g(\beta)=-2\beta+2,\ g'(\beta)=-2$

$x>0$에서 $g'(x)=-2(x^2-x-1)e^{x-2}$이므로 $g'(\beta)=-2$에서

$-2(\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=-2,\ (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$

$\therefore \beta=2$ ($\because (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$에서 $\beta^2-\beta-1=e^{2-\beta}$이고, 두 함수 $y=x^2-x-1$과 $y=e^{2-x}$의 그래프는 $x>0$에서 한 점에서만 만나므로 $\beta=2$가 유일한 해임을 알 수 있다.)

$g(\beta)=-2\beta+2$에서 $g(2)=-2$이므로

$g(2)=b=-2$

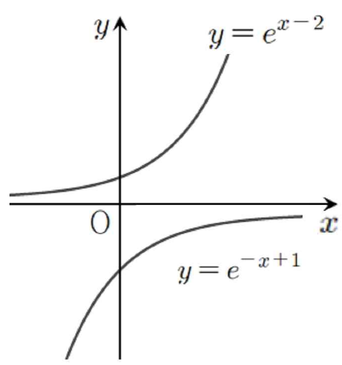
따라서 $x\ge 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때의 b의 값은 -2이다.

이상에서 $a=2$, b의 최댓값은 -2이므로 $a-b$의 최댓값은 4이다.

65) [정답] **43**

[해설]

$y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1}\le ax+b\le e^{x-2}$$

이 성립하려면 직선 $y=ax+b$가 두 그래프의 사이에 있으면 된다.

즉, $a\ge 0$

그래프 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식은

$$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식은

$$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

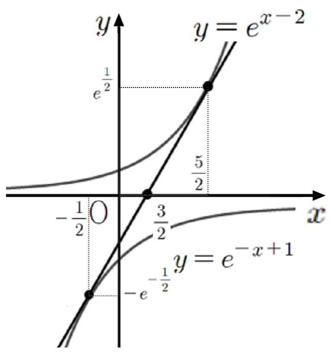
이때, 그래프 $y=e^{x-2}$와 그래프 $y=-e^{-x+1}$에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구하면 ㉠, ㉡이 일치할 때이다.

즉, $e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$$t-2=-s+1 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$$(-t+1)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1} \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하면 $t=\frac{5}{2},\ s=\frac{1}{2}$



위의 그래프에서 조건을 만족하려면

$$t \le \frac{5}{2},\ s \ge \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉤}$$

(ⅰ) 그래프 $y=e^{x-2}$위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$에서

$$a=e^{t-2},\ b=(-t+1)e^{t-2}$$

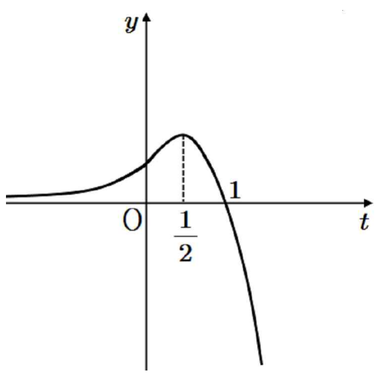
따라서 $ab=f(t)=e^{2t-4}(-t+1)$

그런데 ㉤에서 $t \le \frac{5}{2}$을 만족하므로

$$f(t)=e^{2t-4}(-t+1)\left(\text{단, } t \le \frac{5}{2}\right)$$

$f'(t)=e^{2t-4}(-2t+1)$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$이므로

그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 ab의 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-3}$

(ⅱ) 그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$에서

$$a=e^{-s+1},\ b=e^{-s+1}(-s-1)$$

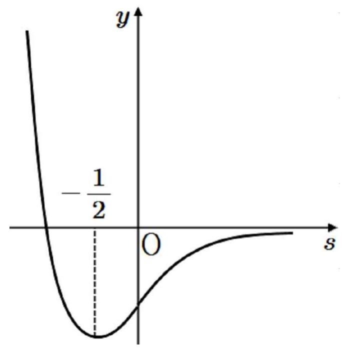
따라서 $ab=g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)$

그런데 ㉤에서 $s \ge \frac{1}{2}$을 만족하므로

$$g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)\left(\text{단, } s \ge \frac{1}{2}\right)$$

$g'(s)=e^{-2s+2}(2s+1)$이고 $g'(s)=0$에서 $s=-\frac{1}{2}$이므로

그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때, ab의 최솟값은 $s=\frac{1}{2}$일 때, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}e$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=\frac{1}{2}e^{-3},\ m=-\frac{3}{2}e$이므로

$$|M\times m^3|=\frac{27}{16}$$

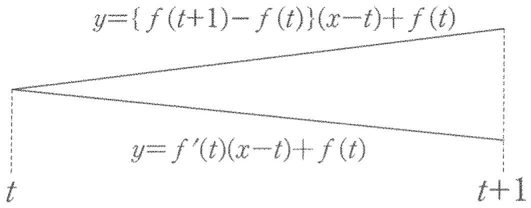
66) [정답] ②

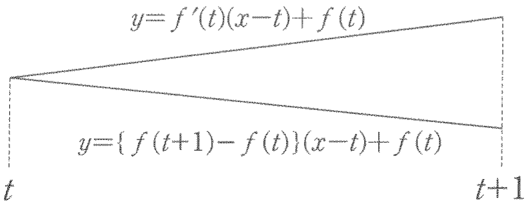
[해설]

두 식

$$f'(t)(x-t)+f(t),\ \{f(t+1)-f(t)\}(x-t)+f(t)$$

은 각각 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 접선의 방정식과 두 점 $(t,\ f(t)),\ (t+1,\ f(t+1))$를 이은 직선의 방정식이다.
그러므로 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 두 직선이 그려질 수 있는 상황은 다음 두 가지가 있다.





첫 번째 그래프의 경우는 $f'(t) \leq f(t+1)-f(t)$이고

두 번째 그래프의 경우는 $f'(t) \geq f(t+1)-f(t)$이다.

그리고 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$가 성립하기 위해서는 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 두 직선 사이에 곡선 $y=f(x)$가 그려져야 한다.

이를 확인하기 위해 곡선의 그래프를 그릴 생각을 자연스럽게 할 수 있다.

이제 $y=f(x)$를 그리기 위해 미분해보자.

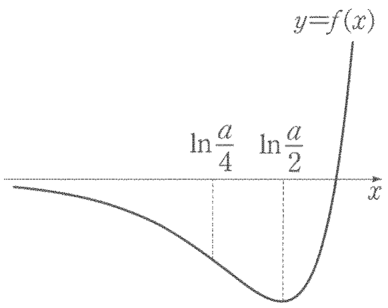
$$f(x)=e^{2x}-ae^{x} \rightarrow f'(x)=2e^{2x}-ae^{x}=2e^{x}\left(e^{x}-\frac{a}{2}\right)$$

$\rightarrow x=\ln\frac{a}{2}$에서 극솟값을 가짐

$$f(x)=e^{2x}-ae^{x} \rightarrow f''(x)=4e^{2x}-ae^{x}=4e^{x}\left(e^{x}-\frac{a}{4}\right)$$

$\rightarrow x=\ln\frac{a}{4}$에서 변곡점을 가짐

이므로 곡선 $y=f(x)$를 그리면 다음과 같다.



닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 직선 $y=\{f(t+1)-f(t)\}(x-t)+f(t)$는 선분이다. 따라서 $f'(t) \geq f(t+1)-f(t)$이고 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$이면 다음과 같이 해석할 수 있다.

[곡선은 선분보다 위에 있고, 접선보다 밑에 있다.]

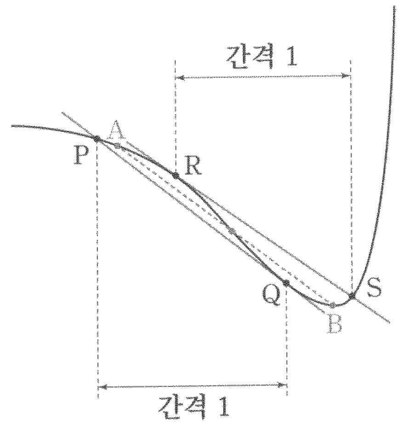
이를 만족하는 상황을 확인하기 위해 그래프를 몇 개 그려보면 위로 볼록으로 일정하거나, 아래로 볼록으로 일정한 구간에서는 부등식

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

이 항상 성립한다는 것을 매우 쉽게 알 수 있다.

그런데 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 변곡점이 존재할 때는 아래로 볼록/위로 볼록이 바뀌므로 따로 꼼꼼히 생각해서 풀어야 한다는 것을 알 수 있다.

변곡점 주변에서 두 점 $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 지나는 선분을 신중하게 움직이면서 그래프를 관찰하자. 확인해보면 다음과 같은 순간이 핵심 포인트임을 알 수 있다.



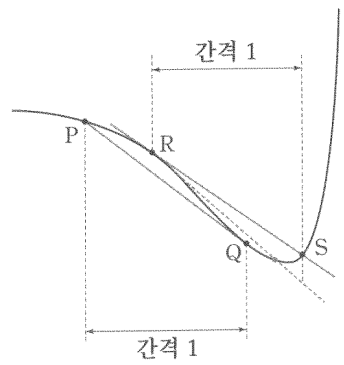
위 그림과 같이

'곡선 위의 점에서의 접선에 대한 접점'

'그 접선과 곡선이 만나는 또 다른 점'

위 두 점의 x좌표의 차이가 1이 되는 두 지점 (Q, R)을 찾으면 그 사이에 두 점을 선택해서 그린 회색 선분 AB와 곡선이 가운데에서 반드시 만나는 것을 알 수 있다. 즉, 부등식이 성립할 수가 없다.

마찬가지로 점 R과 변곡점 사이에서 접하는 접선을 그려보면 점 S보다 밑부분을 지나가므로 곡선과 반드시 만나는 것을 알 수 있다. 즉, 부등식이 성립할 수가 없다.



이를 토대로 구간 $[t,\ t+1]$의 t의 값을 $-\infty$부터 움직이면서 생각해보면 부등식을 만족시키지 않는 최초의 순간은 점 P이며 그 이후 다시 만족시키기 시작하는 순간은 변곡점임을 알 수 있다.

$t \leq -k$에서 $-k$는 점 P의 x좌표

$t \geq k$에서 k는 변곡점의 x좌표

인 것을 한 번에 알아낼 수 있다.

① $t<-k$에서 $-k$는 점 P의 좌표

$f(t+1)-f(t)\geq f'(t+1)$를 만족시켜야 한다.

$$f(t+1)-f(t)\geq f'(t+1)$$

$$(e^{2t+2}-ae^{t+1})-(e^{2t}-ae^{t})\geq 2e^{2t+2}-ae^{t+1}$$

$$t\leq \ln\frac{a}{e^2+1}$$

② $t>k$에서 k는 변곡점의 좌표

변곡점은 미리 구해놨기 때문에 $t\geq \ln\frac{a}{4}$이다.

$$k=\ln\frac{a}{4},\ -k=\ln\frac{a}{e^2+1}$$

$$\ln\frac{a}{4}+\ln\frac{a}{e^2+1}=0$$

$$a=2\sqrt{e^2+1}$$

67) [정답] ⑤

[해설]

$x=2t+\sin t,\ y=1-\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=2+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$$

시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 속도 $\vec{v}$는 $\vec{v}=\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$은

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{25+3}{4}}=\sqrt{7}$$

68) [정답] ③

[해설]

$\vec{v}=(-\sin t, 3\cos t)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{7}$

69) [정답] 1

[해설]

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 시각 t에서 점 P의 속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2-2\cos t}$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$일 때, 점 P의 속도의 크기는 $\sqrt{2-2\times\frac{1}{2}}=1$

70) [정답] ④

[해설]

$f'(t)=\frac{\ln t}{t^2}$이므로 부분적분을 이용하면

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$=\ln x\times\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(1)=0$에서

$f(1)=-1+C=0\qquad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$이므로

$$f(e)=-\frac{2}{e}+1=\frac{e-2}{e}$$

71) [정답] ⑤

[해설]

$$\int(2x+1)\ln x dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\int(x+1)dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\frac{1}{2}(x+1)^2$$

이므로

$$f(x)=(x^2+x)\ln x-\frac{1}{2}(x+1)^2+C$$

(단, C는 적분상수)

이다.

$f(1)=C-2=\frac{1}{2}$이므로 $C=\frac{5}{2}$이다.

따라서 구하고자 하는 값은

$$f(e)=e^2+e-\frac{1}{2}(e+1)^2+\frac{5}{2}$$

$=e^2+e-\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}e^2+2$ 이다.

72) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

또한 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$

조건 (나)에서 $f'(1)=\frac{a+\ln e}{1^2}=0$에서 $a=-1$

$f'(x)=\frac{-1+\ln(ex)}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$

그러므로 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\ln x\times\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left\{\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx$

$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx$

$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$(단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로 $-1+C=0$

$C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$이므로

$a+f(e)=-1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=-\frac{2}{e}$

73) [정답] ⑤

[해설]

$1+2\ln x=t$로 치환하면, $\frac{2}{x}dx=dt$

$\int_1^{e^2}\frac{f(1+2\ln x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)dt=5,$

$\therefore\ \int_1^5 f(x)dx=10$

74) [정답] ④

[해설]

$1+e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$, 즉 $\frac{dt}{dx}=t-1$이고,

$x=-a$일 때 $t=1+e^{-a}$

$x=a$일 때 $t=1+e^a$이므로

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+e^x}dx=\int_{1+e^{-a}}^{1+e^a}\left(\frac{1}{t}\times\frac{1}{t-1}\right)dt$

$=\int_{1+e^{-a}}^{1+e^a}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$

$=[\ln|t-1|-\ln|t|]_{1+e^{-a}}^{1+e^a}$

$=2a-\ln\frac{1+e^a}{1+e^{-a}}$

$=2a-\ln\frac{e^a(1+e^a)}{e^a+1}$

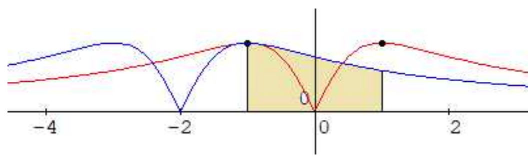
$=2a-a=2$

$\therefore\ a=2$

75) [정답] ①

[해설]

그림과 같이 $a=-1,\ b=-2$일 때이다.



$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_1^3\frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^3=\frac{1}{2}\ln5$

76) [정답] ②

[해설]

$g(x)=\ln\frac{2+\sin(ax)}{k}$라 하면

$g(x)=\ln\{2+\sin(ax)\}-\ln k$에서

$g'(x)=\frac{a\cos(ax)}{2+\sin(ax)}$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2a},\ \frac{3\pi}{2a},\ \frac{5\pi}{2a},\ \frac{7\pi}{2a}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2a}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2a}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2a}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{2a}$	$\cdots$	$\left(\frac{4\pi}{a}\right)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

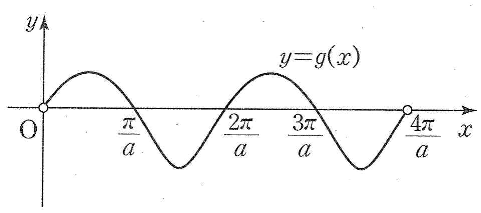
열린 구간 $\left(0,\ \frac{4\pi}{a}\right)$에서 $1 \le 2+\sin(ax) \le 3$이므로

$0 < x < \frac{4\pi}{a}$인 모든 실수 x에 대하여 $k=1$이면

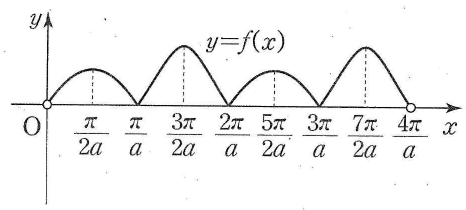
$g(x) \ge 0$이고, $k \ge 3$이면 $g(x) \le 0$이다.

즉, $k=1$ 또는 $k \ge 3$이면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 미분가능하지 않은 실수 x가 존재하려면 자연수 k의 값은 2이어야 한다.

즉, $g(x)=\ln\frac{2+\sin(ax)}{2}$에서 $g(0)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=\sin(ax)$의 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이므로 함수 $y=g(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $\frac{\pi}{2a}$, $\frac{3\pi}{2a}$, $\frac{5\pi}{2a}$, $\frac{7\pi}{2a}$에서 극대이고,

$x=\frac{\pi}{a}$, $\frac{2\pi}{a}$, $\frac{3\pi}{a}$에서 극소이다.

즉, $\alpha_1=\frac{\pi}{2a}$, $\alpha_2=\frac{\pi}{a}$, $\alpha_3=\frac{3\pi}{2a}$, $\alpha_4=\frac{2\pi}{a}$,

$\alpha_5=\frac{5\pi}{2a}$, $\alpha_6=\frac{3\pi}{a}$, $\alpha_7=\frac{7\pi}{2a}$이므로 $m=7$이다.

$\therefore\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_6} f(x)\cos(ax)dx=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{3\pi}{a}} f(x)\cos(ax)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{3\pi}{a}} \left|\ln\frac{2+\sin(ax)}{2}\right|\cos(ax)dx$

한편, $2+\sin(ax)=t$라 하면 $a\cos(ax)=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=\frac{\pi}{2a}$일 때 $t=3$, $x=\frac{3\pi}{a}$일 때 $t=2$이므로

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_6} f(x)\cos(ax)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{3\pi}{a}} \left|\ln\frac{2+\sin(ax)}{2}\right|\cos(ax)dx$

$=\int_3^2 \frac{1}{a}\left|\ln\frac{t}{2}\right|dt$

$=\frac{1}{a}\int_2^3(\ln 2-\ln t)dt$

$=\frac{1}{a}\Big[t\ln 2-t\ln t+t\Big]_2^3$

$=\frac{1}{a}\{(3\ln 2-3\ln 3+3)-(2\ln 2-2\ln 2+2)\}$

$=\frac{1}{a}\ln\frac{8e}{27}$

$\frac{1}{a}\ln\frac{8e}{27}=\ln\frac{2\sqrt[3]{e}}{3}$이므로 $\frac{8e}{27}=\left(\frac{2\sqrt[3]{e}}{3}\right)^a$

즉, $a=3$이다.

$\therefore\ \ a+k+m=3+2+7=12$

77) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 $f(0)=-1$이므로

$c=-1$

$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx-1 & (x \le 1) \\ 2x^2+px+q & (x>1) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+b & (x<1) \\ 4x+p & (x>1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. 즉

$3+2a+b=4+p$ $\cdots$㉠

또한, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$1+a+b-1=2+p+q$

$a+b=p+q+2$ $\cdots$㉡

조건 (나)에서 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$f''(x)=\begin{cases}6x+2a & (x<1)\\ 4 & (x>1)\end{cases}$$

에서 $6+2a=4$

$\therefore\ a=-1$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}6x-2 & (x<1)\\ 4 & (x>1)\end{cases}$$

$a=-1$을 ㉠과 ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$b-q=3,\ b-p-q=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $q=0$

$g(n)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin(2t+\pi)ndt$에서

$t+\frac{\pi}{2}=\theta$라 하면 $1=\frac{d\theta}{dt}$이고,

$t=-\frac{\pi}{2}$일 때 $\theta=0,\ t=\frac{\pi}{2}$일 때 $\theta=\pi$이므로

$$g(n)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin(2t+\pi)ndt$$

$$=\int_0^{\pi} f(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$에서

$u(\theta)=f(\theta),\ v'(\theta)=\sin 2\theta n$이라 하면

$v'(\theta)=f'(\theta),\ v(\theta)=-\frac{1}{2n}\cos 2\theta n$이므로

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}f(\theta)\cos 2\theta n\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}f'(\theta)\cos 2\theta n d\theta$$

$$=-\frac{1}{2n}\{f(\pi)-f(0)\}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}f'(\theta)\cos 2\theta n\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} f'(\theta)\cos 2\theta n\, d\theta\ (\because \text{조건 (가)}) \quad \cdots㉢$$

$\int_0^{\pi} f'(\theta)\cos 2\theta n d\theta$에서

$s(\theta)=f'(\theta),\ w'(\theta)=\cos 2\theta n$이라 하면

$s'(\theta)=f''(\theta),\ w(\theta)=\frac{1}{2n}\sin 2\theta n$이므로

$$\int_0^{\pi} f'(\theta)\cos 2\theta n\, d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2n}f'(\theta)\sin 2\theta n\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}f''(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$$=(0-0)-\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}f''(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} f''(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{2n}\left\{\int_0^1(6\theta-2)\sin 2\theta n\, d\theta+\int_1^{\pi}4\sin 2\theta n\, d\theta\right\}$$

이 때

$\int_0^1(6\theta-2)\sin 2\theta n\, d\theta$에서

$l(\theta)=6\theta-2,\ m'(\theta)=\sin 2\theta n$이라 하면

$l'(\theta)=6,\ m(\theta)=-\frac{1}{2n}\cos 2\theta n$이므로

$$\int_0^1(6\theta-2)\sin 2\theta n\, d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}(6\theta-2)\cos 2\theta n\right]_0^1+\frac{1}{2n}\int_0^1 6\cos 2\theta n\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{2n}\{4\cos 2n-(-2)\}+\frac{1}{2n}\left[\frac{3}{n}\sin 2\theta n\right]_0^1$$

$$=-\frac{2\cos 2n+1}{n}+\frac{3}{2n^2}(\sin 2n-0)$$

$$=-\frac{2\cos 2n+1}{n}+\frac{3\sin 2n}{2n^2}$$

$$\int_1^{\pi}4\sin 2\theta n d\theta=\left[-\frac{2}{n}\cos 2\theta n\right]_1^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}(1-\cos 2n)$$

$$=-\frac{2-2\cos 2n}{n}$$

이므로

$$\int_0^{\pi} f'(\theta)\cos 2\theta n d\theta$$

$$=-\frac{1}{2n}\left\{\left(-\frac{2\cos 2n+1}{n}+\frac{3\sin 2n}{2n^2}\right)+\left(\frac{2-2\cos 2n}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{-3\sin 2n+6n}{4n^3} \quad \cdots㉣$$

㉣을 ㉢에 대비하면

$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin 2\theta n\, d\theta = \frac{1}{2n} \times \frac{-3\sin 2n + 6n}{4n^3}$

$= \frac{6n - 3\sin 2n}{8n^4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} 8n^3 g(n) = \lim_{n\to\infty}\left(8n^3 \times \frac{6n-3\sin 2n}{8n^4}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{3\sin 2n}{n}\right)$

$= 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{3\sin 2n}{n} = 6$

78) [정답] ②

[해설]

$xf(x) = x^2e^{-x} + \int_1^x f(t)dt$에 $x=1$을 대입하면

$f(1) = e^{-1}x$에 대하여 미분하면

$f(x) + xf'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} + f(x)$

$f'(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$

$f(x) = \int(2e^{-x} - xe^{-x})dx = -2e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}dx$

$= -2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C = (x-1)e^{-1} + C$

$f(1) = e^{-1}$이므로 $C = e^{-1}$, $f(x) = (x-1)e^{-x} + e^{-1}$

$\therefore\ f(2) = e^{-2} + e^{-1} = \frac{e+1}{e^2}$

79) [정답] ②

[해설]

$f(x) = 2\int_0^x f'(t)dt - x\cos x$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\int_0^x f'(t)dt = f'(x)$이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여

미분하면 $f'(x) = 2f'(x) - (\cos x - x\sin x)$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

따라서 $f'(\pi) = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1 - \pi\times 0 = -1$

80) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(0) = e^0 - 1 + \int_0^0 f(t)dt$

$= 1 - 1 + 0 = 0$ (참)

ㄴ. $f'(x) = e^x + f(x)$이므로

$f'(0) = e^0 + f(0) = 1 + 0 = 1$ (참)

ㄷ. $f'(x) = e^x + f(x)$에서 $f'(x) - f(x) = e^x > 0$이므로

$f'(x) > f(x)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

81) [정답] 16

[해설]

$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}dt$, $g'(x) = \frac{f(x)}{|x|+1}$, $g(0) = 0$

(가)에서 $g'(2) = 0$이므로 $f(2) = 0$

(나)에서 $f(0) = 0$ 이어야한다. 따라서

$f(x) = x(x-2)(x-c)$이고

$g'(-1) = \frac{f(-1)}{2}$가 최대가 되도록 하려면

$0 < c < 2$이고 $g(2) \geq 0$ 인 최소의 c일 때이다.

$\frac{f(x)}{x+1} = \frac{x(x-2)(x-c)}{x+1} = x^2 - (3+c)x + 3(c+1) - \frac{3(c+1)}{x+1}$

$g(2) = \int_0^2\left(x^2 - (3+c)x + 3(c+1) - \frac{3(c+1)}{x+1}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}(c+1)x^2 + 3(c+1)x - 3(c+1)\ln(x+1)\right]_0^2$

$= -\frac{4}{3} + 4(c+1) - 3(c+1)\ln 3 \geq 0$

$3(c+1) \geq \frac{4}{4-3\ln 3}$, $f(-1) = -3(c+1) \leq \frac{-4}{4-3\ln 3}$

$\therefore n = -4,\ m = 4,\ |m\times n| = 16$

82) [정답] 83

[해설]

(i) 문제에 주어진 연속함수 $f(x)$에 대하여 열린 구간 $(-5,\ \infty)$에서 정의된 함수 $F(x)$를

$F(x) = \int_1^x f(t)dt$ …㉠

라 합시다. 문제에서 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 열린 구간 $(-5,\ \infty)$에서

$g(x) = f(x)F(x)$ …㉡

라 하였습니다. 이때 ㉠에서

$F(1) = 0$ …㉢

이므로 이를 ㉡에 대입하면 $g(1)=0$을 얻습니다.

따라서 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=(x-1)(x-a)$

로 놓을 수 있습니다. 이때 ㉡을 다시 쓰면,

$$f(x)F(x)=(x-1)(x-a)$$
$$=x^2-(a+1)x+a$$

이고, 이 등식의 양변에 2를 곱한 후, 양변을 x에 대하여 적분하면,

$$\int 2f(x)F(x)dx=\int\{2x^2-2(a+1)x+2a\}dx$$

에서

$$\{F(x)\}^2=\frac{2}{3}x^3-(a+1)x^2+2ax+b\cdots㉣$$

(b는 상수)

입니다. 이때 ㉢에 의하여

$$\{F(1)\}^2=\frac{2}{3}-(a+1)+2a+b=0$$

이므로 $b=-a+\frac{1}{3}$이고, 이를 ㉣에 대입하여 정리하면,

$$\{F(x)\}^2=\frac{2}{3}x^3-(a+1)x^2+2ax-a+\frac{1}{3}$$
$$=(x-1)^2\left(\frac{2}{3}x-a+\frac{1}{3}\right)\qquad\cdots㉤$$

을 얻습니다.

(ii) a의 값의 범위를 구해봅시다.

문제에서 함수 $g(x)$는 $g(0)\geq-3$을 만족시킨다고 하였으므로

$g(0)=(0-1)(0-a)\geq-3$

에서 $a\geq-3$을 얻습니다.

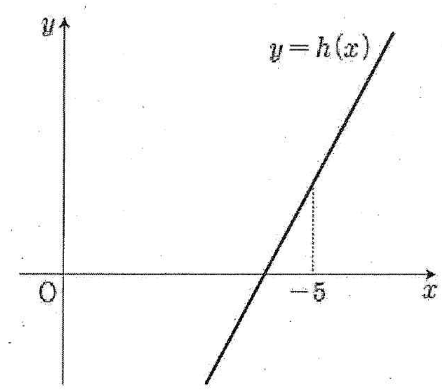
한편 함수 $F(x)$의 모든 정의역에서 $\{F(x)\}^2\geq0$이므로 ㉤에서 $x>-5$인 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)^2\left(\frac{2}{3}x-a+\frac{1}{3}\right)\geq0$$

입니다. 즉,

$$\frac{2}{3}x-a+\frac{1}{3}\geq0$$

이므로 함수 $h(x)$를 $h(x)=\frac{2}{3}x-a+\frac{1}{3}$라 하면, $h(-5)\geq0$이 성립해야 합니다.



따라서

$$h(-5)=\frac{2}{3}\times(-5)-a+\frac{1}{3}\geq0$$

에서 $a\leq-3$을 얻습니다.

종합하면, $-3\leq a\leq-3$에서 $a=-3$입니다.

(iii) 함수 $F(x)$를 구해봅시다.

$a=-3$을 ㉤에 대입하면

$$\{F(x)\}^2=\frac{2}{3}(x-1)^2(x+5)$$

를 얻습니다. 즉,

$$F(x)=|x-1|\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)}$$

또는

$$F(x)=-|x-1|\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)}$$

입니다.

이때 문제에서 $-5<x_1<1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\int_{x_1}^{1}f(x)dx\geq0,\ \int_{1}^{x_2}f(x)dx\geq0$$

이라 하였는데, 이는 각각

$F(x_1)\leq0$, $F(x_2)\geq0$

입니다. 따라서 $-5<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\leq0$이고, $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\geq0$이므로, 이를 만족시키는 함수 $F(x)$는

$$F(x)=(x-1)\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)}$$

입니다.

(iv) 구하는 값은

$$\int_{x}^{13}f(t)dt=F(13)-F(x)$$
$$=(13-1)\sqrt{\frac{2}{3}(13+5)}-(x-1)\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)}$$

$$=24\sqrt{3}-(x-1)\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)} \qquad \cdots ㅂ$$

의 최댓값과 같습니다. 따라서

$(x-1)\sqrt{\frac{2}{3}(x+5)}$

의 최솟값을 구해야하는데, 이는 $-5<x<1$일 때

$-\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2(x+5)}$ 이고, $x \geq 1$일 때

$\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2(x+5)}$ 이므로, ㅂ의 값이 최대가 되도록 하는 x는 열린 구간 $(-5,\ 1)$에 존재합니다.

이때

$-\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^2(x+5)}$

의 최솟값을 구해야하므로 함수

$y=\frac{2}{3}(x-1)^2(x+5)$

의 최댓값을 구해야하는데, 그 도함수

$y'=2(x-1)(x+3)$

로부터 $x=-3$에서 최댓값을 가진다는 사실을 알 수 있습니다. 따라서 $x=-3$을 ㅂ에 대입하여 계산하면

$$\int_x^{13} f(t)dt \leq 24\sqrt{3}-(-3-1)\sqrt{\frac{2}{3}\times(-3+5)}$$
$$=\frac{80}{3}\sqrt{3}$$

이므로 구하는 값은

$p+q=3+80=83$

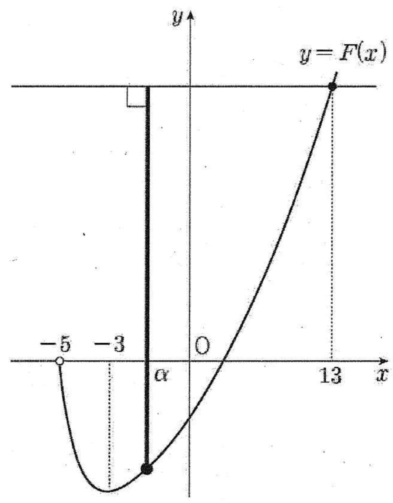
TMI)

$\int_x^{13} f(t)dt=F(13)-F(x)$이므로

$-5<\alpha<13$일 때, 점 $(\alpha,\ F(\alpha))$에서 직선 $y=F(13)$까지의 거리는 $\int_\alpha^{13} f(t)dt$의 값과 같습니다.

(아래 그림에서 굵은 선분의 길이)

따라서 $x=-3$일 때, $\int_x^{13} f(t)dt$의 값이 최대가 된다는 사실을 알 수 있습니다.



83) [정답] 21

[해설]

(ⅰ) 문제에서 $x \geq -3\sqrt{2}$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-3\sqrt{2}}^{x} f(t)dt-12\sqrt{x^2+7} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하였으므로, 구간 $[-3\sqrt{2},\ \infty)$에서 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=f(x)-\frac{12x}{\sqrt{x^2+7}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

입니다. 또한 문제에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq \frac{12x}{\sqrt{x^2+7}}$

라 하였으므로, ㉡에서 $x \geq -3\sqrt{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x) \geq 0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이 성립합니다.

(ⅱ) 조건 (가)에서 $x \geq -3$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=\frac{1}{12}(x-3)(x^3+ax^2+bx+c)-48 \cdots\cdots ㉣$$

이라 하였으므로 $g(3)=-48$입니다. 이때 ㉠에서

$g(3)=\int_{-3\sqrt{2}}^{3} f(t)dt-12\sqrt{3^2+7}$

이므로

$\int_{-3\sqrt{2}}^{3} f(t)dt-12\sqrt{3^2+7}=-48$

에서

$\int_{-3\sqrt{2}}^{3} f(t)dt=0$

을 얻습니다.

또한 ㉣에서 $g(x)$는 구간 $[-3,\ \infty)$에서 최고차항의 계수가 $\frac{1}{12}$인 사차함수이므로 도함수 $g'(x)$는 최고차항의 계수가

$\frac{1}{3}$인 삼차함수임을 알 수 있습니다.

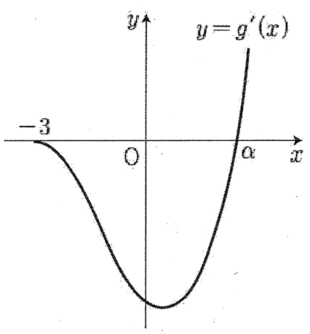
(ⅰ), (ⅱ)에서 알아낸 함수 $g'(x)$에 대한 정보를 구간에 따라 종합하면 다음과 같습니다.

구간 $[-3\sqrt{2},\ -3)$에서 $g'(x)$는 $g'(x) \geq 0$인 어떤 함수이며, 구간 $[-3,\ \infty)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고, $g'(x) \geq 0$인 삼차함수입니다.

(ⅲ) 조건 (나)에서 $\alpha > -3$인 상수 α에 대하여 $g'(-3) = g'(\alpha) = 0$이라 하였으므로, 구간 $[-3,\ \infty)$에서 삼차함수 $g'(x)$는

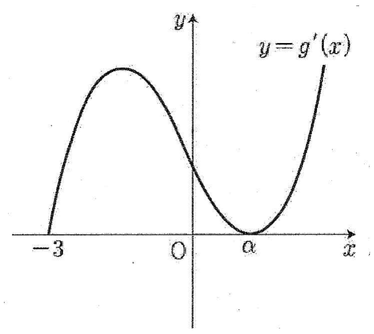
$$g'(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2(x-\alpha)$$

이거나,



$$g'(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-\alpha)^2$$

입니다.



이 중에서 ㉢을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-\alpha)^2$$

입니다.

(ⅳ) $\displaystyle\int_{-3\sqrt{2}}^{3} g'(x) = g(3) - g(-3\sqrt{2})$

$= -48 - g(-3\sqrt{2})$

입니다. 이때 ㉠에서

$$g(-3\sqrt{2}) = \int_{-3\sqrt{2}}^{-3\sqrt{2}} f(t)dt - 12\sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + 7}$$

$= -60$

이므로

$$\int_{-3\sqrt{2}}^{3} g'(x)dx = -48 - (-60)$$

$= 12$

입니다. 즉,

$$\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx + \int_{-3}^{3} g'(x)dx = 12 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

를 얻습니다. 이때,

$\displaystyle\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx$, $\displaystyle\int_{-3}^{3} g'(x)dx$의 값의 범위를 각각 생각해봅시다.

(ⅴ) 우선 $\displaystyle\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx$의 값의 범위를 구하기 위하여 이를 전개하면,

$$\int_{-3}^{3} g'(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} (x+3)(x-\alpha)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} (x+3)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \{x^3 + (3-2\alpha)x^2 + (\alpha^2 - 6\alpha)x + 3\alpha^2\}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \{(3-2\alpha)x^2 + 3\alpha^2\}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} \{(3-2\alpha)x^2 + 3\alpha^2\}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{(3-2\alpha)}{3}x^3 + 2\alpha^2 x\right]_0^3$$

$= 6(\alpha^2 - 2\alpha + 3)$

$= 6(\alpha - 1)^2 + 12$

이므로

$$\int_{-3}^{3} g'(x)dx \geq 12$$

입니다. 따라서 ㉤에서

$$\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx \leq 0$$

을 얻습니다 이때 ㉢에 의하여

$$\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx \geq 0$$

이므로

$$\int_{-3\sqrt{2}}^{-3} g'(x)dx = 0, \qquad \cdots\cdots ㉥$$

$$\int_{-3}^{3} g'(x)dx = 12 \qquad \cdots\cdots ㉦$$

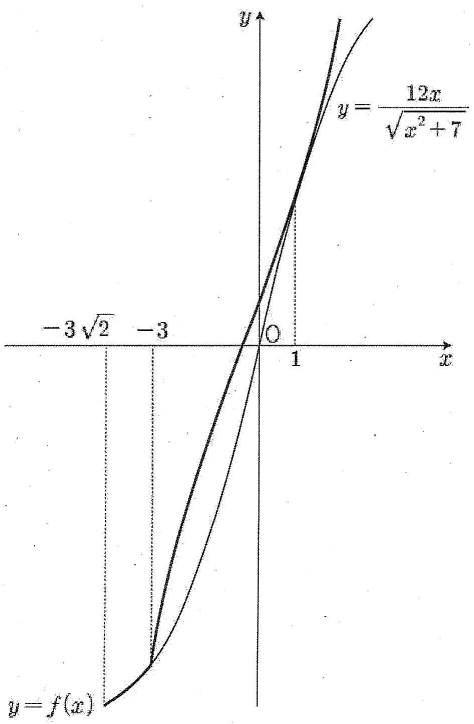
임을 알 수 있습니다.

ⓢ을 만족시키는 α의 값은 $\alpha=1$이므로, 조건 (나)를 만족시키는 삼차함수 $g'(x)$는

$g'(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-1)^2$

입니다. 또한 ㉢, ㉥에 의하여 구간 $[-3\sqrt{2},\ -3)$에서 함수 $g'(x)$는 상수함수 $g'(x)=0$임을 알 수 있습니다.

종합하면 함수 $f(x)$는 다음과 같습니다.



구간 $[-3\sqrt{2},\ -3)$에서 함수 $f(x)$는 $f(x)=\frac{12x}{\sqrt{x^2+7}}$이고,

구간 $[-3,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-1)^2+\frac{12x}{\sqrt{x^2+7}}$ 입니다.

따라서

$f(-4)=\frac{12\times(-4)}{\sqrt{(-4)^2+7}}$

$=-\frac{48}{\sqrt{23}}$,

$f(4)=\frac{1}{3}\times(4+3)\times(4-1)^2+\frac{12\times 4}{\sqrt{4^2+7}}$

$=21+\frac{48}{\sqrt{23}}$

이므로 구하는 값은

$f(-4)+f(4)=-\frac{48}{\sqrt{23}}+21+\frac{48}{\sqrt{23}}$

$=21$

84) [정답] ③

[해설]

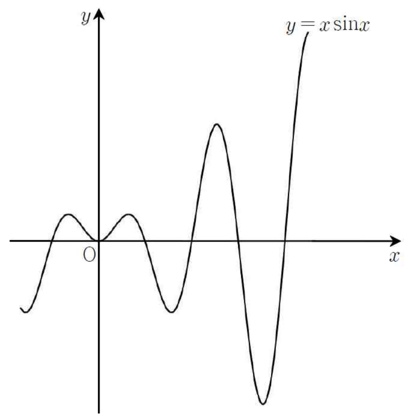
수직선 운동에서 점 P의 속도를 $v(t)=t\sin t$로 보면

$\int_0^x |t\sin t|dt$, $\int_0^x t\sin t dt$는 각각 움직인 거리와 위치의 변화량이다.

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_{\pi}^{2\pi}=-3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_{2\pi}^{3\pi}=5\pi$$



$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

따라서 $f(x)$=(거리의 합)$-|$(위치의 변화량)$|$이다.

ㄱ. $f(2\pi)=(\pi+3\pi)-|\pi-3\pi|=2\pi$ (참)

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$, $\int_0^{\alpha} t\sin t dt=0$이면

$f(\alpha)=(\pi+\pi)-|\pi-\pi|=2\pi$ (거짓)

ㄷ. $2\pi<\beta\le x\le 3\pi$, $\int_0^{\beta} t\sin t dt=0$이면

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

$=6\pi+\int_{\beta}^{x} t\sin t dt-\int_{\beta}^{x} t\sin t dt$

$=6\pi$

$$\therefore \int_{\beta}^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

85) [정답] **19**

[해설]

$-1\le x\le 0$일 때, $|f(x)\sin x|=f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때, $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$

$$\therefore \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|dx = 2,\ \int_{0}^{1} |f(x)\sin x|dx = 3$$

$g(x)$에 $x=0$을 대입하면

$$g(0) = \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|dx = 2$$

$\therefore g(0) = 2$

$g(x)$에 $x=1$을 대입하면

$$g(1) = \int_{-1}^{1} |f(t)\sin t|dt$$

$$= \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|dx + \int_{0}^{1} |f(x)\sin x|dx$$

$= 2+3$

$\therefore g(1) = 2+3 = 5$

$g(x)$에 $x=-1$을 대입하면

$$g(-1) = \int_{-1}^{-1} |f(x)\sin x|dx = 0$$

$\therefore g(-1) = 0$

이때 $g'(x) = |f(x)\sin x|$가

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x| = f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때, $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$이므로

$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx$에서 $-x=t$로 치환하면

$dx = -dt,\ -1 \le t \le 1$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx$$

$$= \int_{1}^{-1} f(t)g(t)\sin(-t)(-1)dt$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sin t dt$$

$$= -\int_{-1}^{0} g'(t)g(t)dt + \int_{0}^{1} g'(t)g(t)dt$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}[\{g(1)\}^2 - \{g(0)\}^2] - \frac{1}{2}[\{g(0)\}^2 - \{g(-1)\}^2]$$

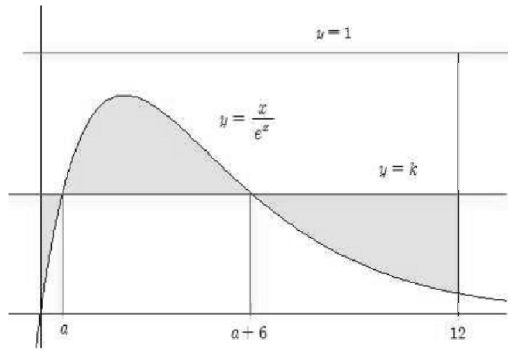
$$= \frac{1}{2}(5^2-2^2) - \frac{1}{2}(2^2-0^2)$$

$$= \frac{17}{2}$$

86) [정답] 18

[해설]

$g(t)$는 그림과 같이 색칠한 영역의 넓이이다.



$f(x) = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x},\ f'(x) = (1-x)e^{-x}$이므로

극댓값(최댓값)은 $f(1) = \dfrac{1}{e} < 1$이므로

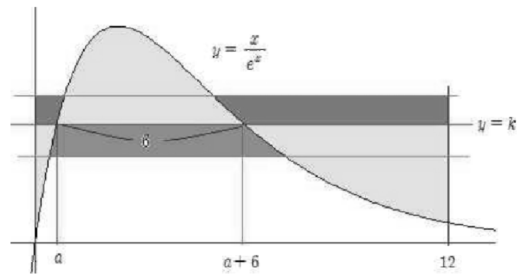
(ⅰ) $t > \dfrac{1}{e}$이면

$$g(t) = \int_{0}^{12}(t-f(x))dx = 12t - \int_{0}^{12} f(x)dx\text{이므로}$$

$g'(1) = 12$

(ⅱ) $\dfrac{12}{e^{12}} \le t \le \dfrac{1}{e}$일 때

$f(x) = t$는 두 실근 $a,\ b(a<b)$를 갖는다.



$$g(t) = \int_{0}^{a}(t-f(x))dx + \int_{a}^{b}(f(x)-t)dx + \int_{b}^{12}(t-f(x))dx$$

$$= \int_{0}^{12}(t-f(x))dx + 2\int_{a}^{b}(f(x)-t)dx$$

$$= t\int_{0}^{12}dx - \int_{0}^{12}f(x)dx + 2\int_{a}^{b}f(x)dx - 2t\int_{a}^{b}dx$$

$g'(t) = 12 - 0 + 2(f(b(t)) \times b'(t) - f(a(t)) \times a'(t))$
$\qquad - 2(b(t)-a(t)) - 2t(b'(t)-a'(t))$

$= 12 - 2(b-a)$

$g'(k) = 12 - 2(b-a) = 0$

$\therefore\ b-a=6,\ b=a+6$

따라서 $f(a) = f(a+6)$이므로

$\dfrac{a}{e^a} = \dfrac{a+6}{e^{a+6}}$, 즉 $\dfrac{a+6}{a} = e^6$

즉 $\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right) = \ln e^6 = 6$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\therefore\ g'(1) + \ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right) = 12+6 = 18$

87) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3k}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{3k}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_{1}^{4}\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\ln x\Big]_{1}^{4}$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2$$

88) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$1+\frac{k}{n}\to x$라 하면 $\frac{1}{n}\to dx$

x의 구간은 [1. 2]이므로

$$(\text{준식})=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}f(x)dx$$

따라서 함수 $f(x)=\ln x$를 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\ln x dx$$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}\cdot dx=dt$이 되고, 구간은 $[0,\ \ln 2]$

$$=\int_{0}^{\ln 2}t dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

89) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{2}{x}f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{2}2xe^{x^2-1}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2-1=t$라 하면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로 ㉠에서

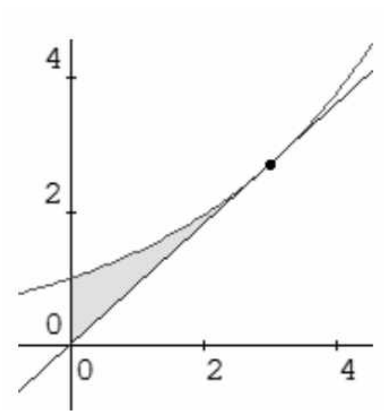
$$\int_{1}^{2}2xe^{x^2-1}dx=\int_{0}^{3}e^t dt$$

$$=\Big[e^t\Big]_{0}^{3}$$

$$=e^3-1$$

90) [정답] ③

[해설]



$y'=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$이므로 접선의 방정식은 $y=\frac{e}{3}x$

$$S=\int_{0}^{3}\left(e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{3}x\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{6}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{3}{2}e-3$$

91) [정답] ①

[해설]

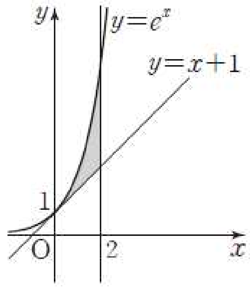
$y'=e^x$이므로 접선 l의 방정식은 $y-1=x$, 즉 $y=x+1$

따라서 곡선 $y=e^x$과 접선 l 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.

이때 구하는 넓이는

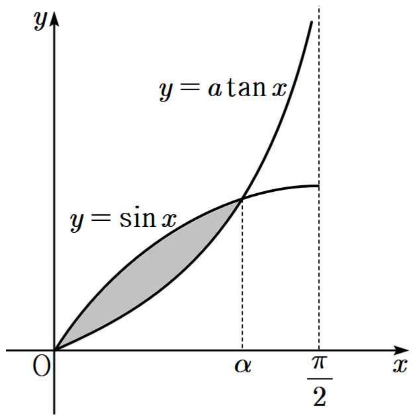
$$\int_{0}^{2}(e^x-x-1)dx=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{0}^{2}$$

$=(e^2-4)-1=e^2-5$



92) [정답] ②

[해설]



두 함수 $y=\sin x$, $y=a\tan x$의 교점의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\alpha=a\tan\alpha$, $\sin\alpha=a\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha\neq=$이므로 $\cos\alpha=a$

$$f(a)=\int_0^\alpha(\sin x-a\tan x)\,dx$$

$$=\int_0^\alpha\sin x\,dx-a\int_0^\alpha\tan x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠을 a에 대하여 미분하면

$$f'(a)=\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}-\int_0^\alpha\tan x\,dx-a\tan\alpha\frac{d\alpha}{da}$$

$$=(\sin\alpha-\cos\alpha\tan\alpha)\frac{d\alpha}{da}-\int_0^\alpha\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\Big[\ln\cos x\Big]_0^\alpha$$

$$=\ln\cos\alpha$$

$$=\ln a$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln\frac{1}{e^2}=-2$$

93) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

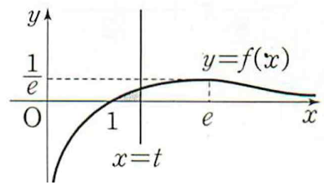
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\int_1^t\frac{\ln x}{x}dx$$

$\ln x=u$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$이고,

$x=1$일 때 $u=0$, $x=t$일 때 $u=\ln t$이므로

$$S(t)=\int_1^{\ln t}u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln t}=\frac{(\ln t)^2}{2}$$

$$\lim_{t\to1+}\frac{s(t)}{(t-1)^2}=\lim_{t\to1+}\frac{(\ln t)^2}{2(t-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\left(\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to1+}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $g(t)=\ln t$라 하면 $g'(t)=\frac{1}{t}$이므로 ㉠에서

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to1+}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2=\frac{1}{2}\{g'(1)\}^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$$

94) [정답] ④

[해설]

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$이므로

$-x^3+x=(\tan\theta)x$에서 $x(x^2+\tan\theta-1)=0$

$x\geq0$에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{1-\tan\theta}$이다.

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S(\theta)=\int_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}\{(-x^3+x)-(\tan\theta)x\}\,dx$$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}=\frac{1}{4}(1-\tan\theta)^2$

이므로 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{1}{4}\left(\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}\right)^2$ 이다.

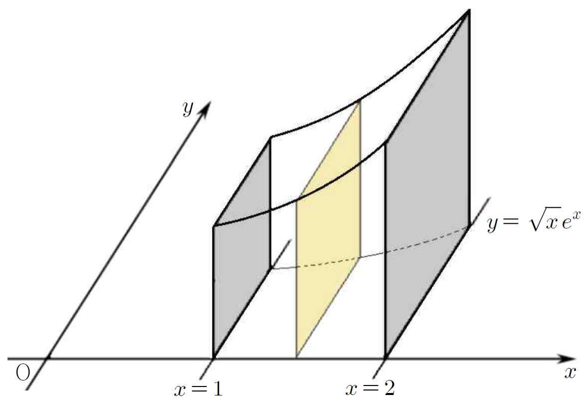
$f(\theta)=\tan\theta$라 하면 $f'(\theta)=\sec^2\theta$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

따라서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\times2^2=1$

95) [정답] ④

[해설]



위의 그래프에서 x점에서의 사각형은 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=(\sqrt{x}e^x)^2=xe^{2x}$

구간 $[1,\ 2]$에서의 부피를 V라 하면 $V=\int_1^2 S(x)dx$이므로

$$V=\int_1^2 xe^{2x}dx$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2$$

$$=\frac{3e^4-e^2}{4}$$

96) [정답] ②

[해설]

이 입체도형을 x좌표가 x $(0\le x\le k)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\right)^2=\frac{e^x}{e^x+1}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^k S(x)dx=\int_0^k\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

이때 $e^x+1=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=2$, $x=k$일 때 $t=e^k+1$이고 $\frac{dt}{dx}=e^x$ 이므로

$$\int_0^k\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_2^{e^k+1}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_2^{e^k+1}$$

$$=\ln(e^k+1)-\ln2=\ln\frac{e^k+1}{2}$$

그런데 주어진 입체도형의 부피가 $\ln7$이므로

$$\ln\frac{e^k+1}{2}=\ln7$$

$$\frac{e^k+1}{2}=7,\ e^k=13$$

따라서 $k=\ln13$

97) [정답] ④

[해설]

$$\int_1^e\left(\frac{3}{x}-\sqrt{\ln x}\right)^2dx=\int_1^e\left(\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}\sqrt{\ln x}+\ln x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{9}{x}-4(\ln x)^{\frac{3}{2}}+x\ln x-x\right]_1^e=6-\frac{9}{e}$$

98) [정답] ④

[해설]

$x=e^t\cos(\sqrt{3}t)-1,\ y=e^t\sin(\sqrt{3}t)+1\,(0\le t\le\ln7)$에서 양변을 시간에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=e^t\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}e^t\sin\sqrt{3}t$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t\sin\sqrt{3}t+\sqrt{3}e^t\cos\sqrt{3}t$$

$$\int_0^{\ln7}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_0^{\ln 7} \sqrt{(1+3)e^{2t}}\,dx$$

$$= \left[2e^t\right]_0^{\ln 7}$$

$$= 12$$

99) [정답] 2π

[해설]

$\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1dt = \left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

100) [정답] ②

[해설]

곡선의 길이를 l이라 하면

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$이다.

$\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$이므로

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$이다.