[유형별한글] [수학1] 사관학교 최근5개년

03 수1 01 지수

03 지수법칙의 활용

02 활용2 (정수론)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 6

1. $\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3. 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=2$, $b^5=7$, $c^3=13$일 때, $(abc)^{2n}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

03 수1

02 로그

02 로그의 성질

06 로그의 성질6 (식의 값 구하기)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

4. 두 양수 a, $b(a>b)$에 대하여 $9^a=2^{\frac{1}{b}}$,

$(a+b)^2=\log_3 64$일 때, $\dfrac{a-b}{a+b}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

5. 1이 아닌 두 양의 실수 a, b에 대하여

$$\frac{a}{\log_a b}=\frac{3}{4\log_b a}=\frac{a+3}{4}$$

이 성립할 때, $a+b$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

6. 1보다 큰 양수 a, b, m, n에 대하여

$$\log_{a^n} b^m=4,\ \log_{a^m} b^n=8$$

일 때, $\log_2 \dfrac{n}{m}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ $\dfrac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

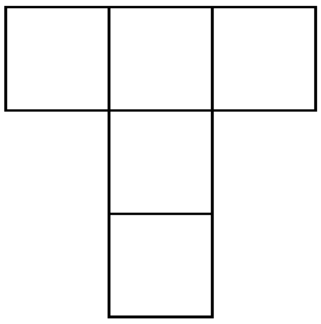
03 수1 02 로그

02 로그의 성질

09 로그의 성질 활용2 (해석)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 8

7. 그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은?



① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2

④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

8. 두 상수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{A}(\log_2 a, \log_2 b)$와 원점 O를 지나는 직선이 곡선 $y=x^2+1$과 점 A에서 접할 때, b의 값은? (단, $a>1$)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

03 수1 03 지수함수

01 지수함수의 그래프

02 지수함수의 그래프2 (평행이동과 대칭이동)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 5

9. 함수$y=4^x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=2^{2x-3}+3$의 그래프가 일치할 때, ab의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

10. 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행 이동하였더니 함수 $y=16\times2^{2x}+3$의 그래프가 되었다. 이때 p의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

11. 함수 $y=9(3^{x-1}+1)$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

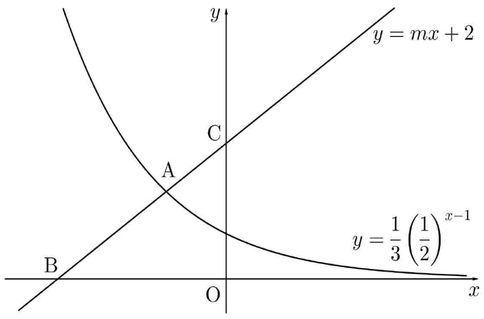
03 수1 03 지수함수

01 지수함수의 그래프

06 지수함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

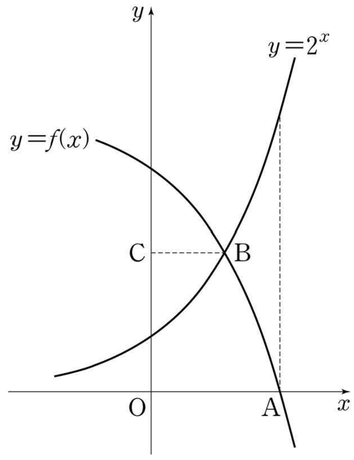
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 7

12. 그림과 같이 직선 $y=mx+2\ (m>0)$이 곡선 $y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$과 만나는 점을 A, 직선 $y=mx+2$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$일 때, 상수 m의 값은?



① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{17}{24}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)

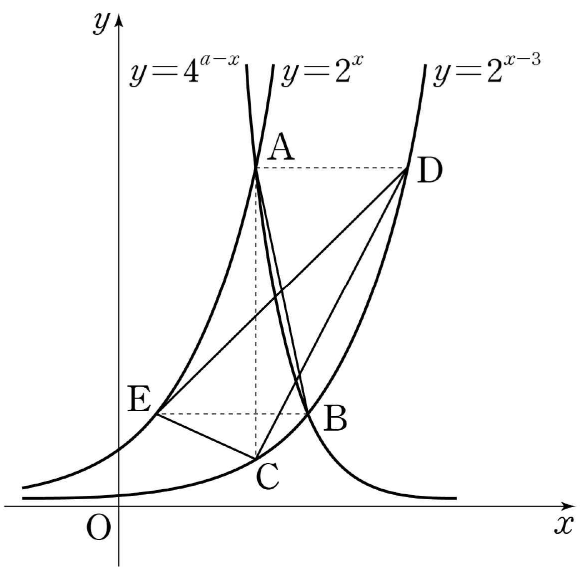


[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 8

13. 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

14. 그림과 같이 곡선 $y=4^{a-x}$이 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 C, 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 D라 하고, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{26}$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)



<보 기>

ㄱ. $x_2-x_1=1$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{17}{3}$

ㄷ. 삼각형 CDE의 넓이는 $\dfrac{85}{12}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

03 지수함수

04 지수함수의 활용

03 활용3 (지수방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

15. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^{x},\ y=|a^{-x-1}-1|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=|a^{-x-1}-1|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.

ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 함수 $f(x)=|3^x-4|+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

17. 10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|3^x-a|+b$$

라 하자. x에 대한 방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

03 수1　04 로그함수

01 로그함수의 그래프

05 로그함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처]　2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 9

18. 곡선 $y=|\log_2(-x)|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 13

19. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프와 점 $(p,\ q)$에서 만날 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

20. 두 함수 $y=\log_2 x \times (\log_2 x-4)$, $y=\log_2 \frac{x}{64}$의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라고 할 때, 두 점 A, B의 x좌표의 합은?

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

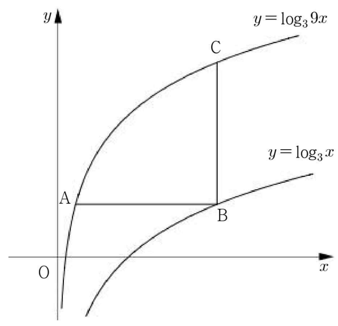
03 수1　04 로그함수

01 로그함수의 그래프

06 로그함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

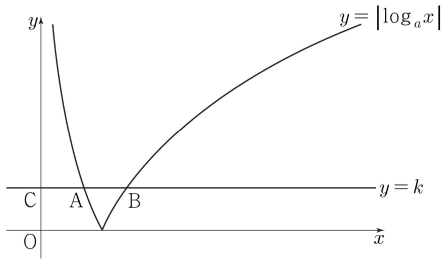
21. 곡선 $y=\log_3 9x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,b)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 9x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$때, $a+3^b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

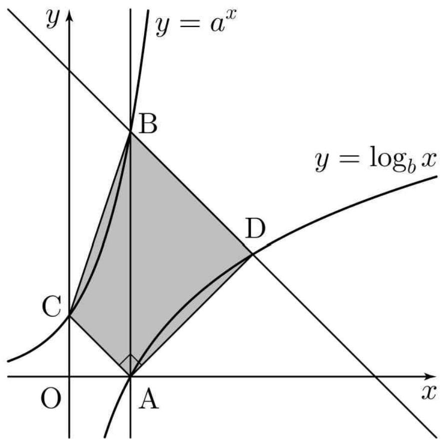
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 28

22. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=k(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$일 때, 곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

23. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A$(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C$(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은?



① $4\sqrt{2}$　② $4\sqrt{3}$　③ 8　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{6}$

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

05 역함수5 (원함수와 역함수의 교점)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 19

24. 함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오.
(단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.)

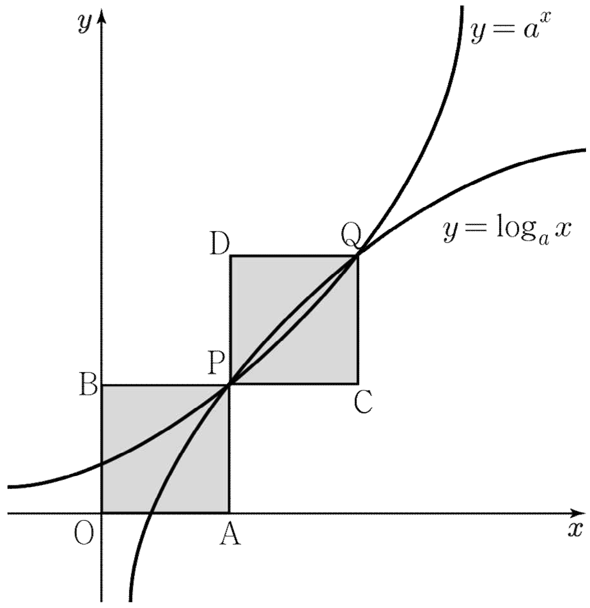
25. 1보다 큰 상수 a에 대하여 두 함수 $y=\log_2 x+a$, $y=2^{x-a}$의 그래프는 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:3$이다. $\overline{\mathrm{OB}}\times 2^a$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $2^{\frac{11}{6}}$ ② $2^{\frac{13}{6}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$
④ $2^{\frac{17}{6}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{6}}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 16

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 16

26. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은?
(단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

03 수1

04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

06 로그부등식1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

27. 부등식 $2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오.

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 5

28. 부등식 $\log_3(x-1)<2$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 5 ③ 8
④ 11 ⑤ 14

29. 부등식

$$\log_3(x-3)<3$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오.

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

09 로그부등식4 (해의 조건)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

30. x에대한 연립부등식

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \\ \log_2 4x < \log_2 (x+k) \end{cases}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 25

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 25

31. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 (10-x) \leq 4 \\ x^2 - ax < 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

32. 부등식 $\log_{\frac{1}{5}}(5x+3) \leq \log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+k)$를 만족시키는 정수 x가 2개일 때, 상수 k 값의 범위는? (단, $k>1$)

① $1<k\leq 5$ ② $2<k\leq 5$ ③ $2\leq k\leq 5$

④ $3<k\leq 5$ ⑤ $3\leq k\leq 5$

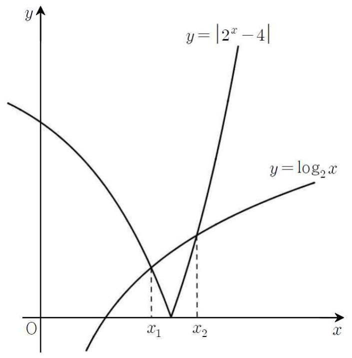
03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소비교)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

33. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

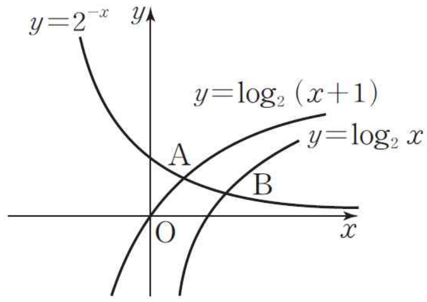
ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 그림과 같이 곡선 $y=2^{-x}$이 두 곡선 $y=\log_2(x+1)$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

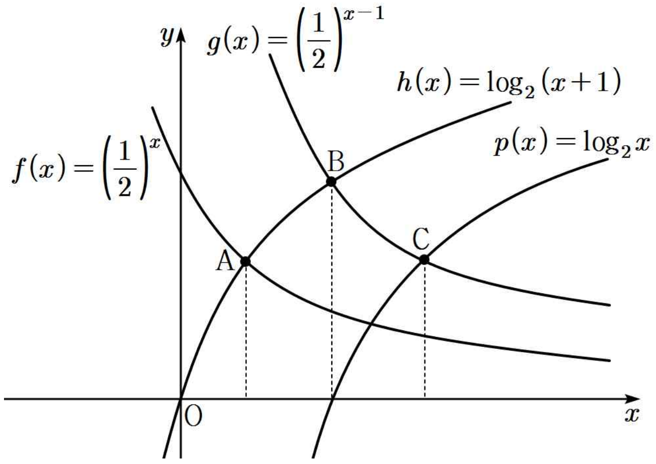
ㄱ. $x_1<\sqrt{2}-1$

ㄴ. $1<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<2^{-\sqrt{2}}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 그림과 같이 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$와 함수 $h(x)=\log_2(x+1)$가 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$이라 하고, 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$가 함수 $h(x)=\log_2(x+1)$, 함수 $p(x)=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$라 하자. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. $2^{-x_1}=\log_2 x_3$

ㄷ. $y_2-y_1>x_2-x_1$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

11 활용3 (삼각함수 사이의 관계)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 5

36. 이차방정식 $5x^2-x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ $-\frac{8}{5}$
④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

37. 이차방정식 $2x^2-2ax+1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구하면?
$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ a는\ 상수\right)$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

38. 이차방정식 $4x^2+\sqrt{3}x+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{4}$
④ $-\frac{13}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

03 활용3 (치환을 이용한 Mm)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 7

39. 함수 $f(x)=\cos^2x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 25

40. 함수 $f(x)=\sin^2x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 최댓값을 M이라 할 때, $4M$의 값을 구하시오.

41. 함수 $f(x)=4-3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos(2\pi-x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

01 삼각방정식1 (일차식꼴)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

42. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은?

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

43. $0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} |\sin x| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$$

44. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$

의 모든 해의 합은?

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

02 삼각방정식2 (이차식꼴)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

45. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{7}{4}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{9}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

46. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$$

의 모든 해의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$

④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

47. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\tan 2x \sin 2x = \frac{3}{2}$의 모든 해의 합은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

04 삼각방정식4 (대칭성과 실근)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 17

48. $0 \le x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오.

49. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos x = \frac{1}{3}$의 모든 근의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

50. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x = -\frac{1}{4}$ 의 모든 실근의 합은?

① π　② 2π　③ 3π
④ 4π　⑤ 5π

03 수1　06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

05 삼각방정식5 (실근의 개수)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 15

51. 함수

$$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

> (가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다.
> (나) $0 \leq x \leq 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 19

52. 다음 물음에 답하시오.

(1) x에 대한 방정식 $\left|\cos x+\frac{1}{3}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 30α의 값을 구하시오. (단, $0\le x<2\pi$)

(2) $2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt{5^5})^{\frac{1}{3}}$이 어떤 자연수 k의 n제곱근이 되도록 할 때, $n+\log_5 k$의 최댓값을 구하시오.

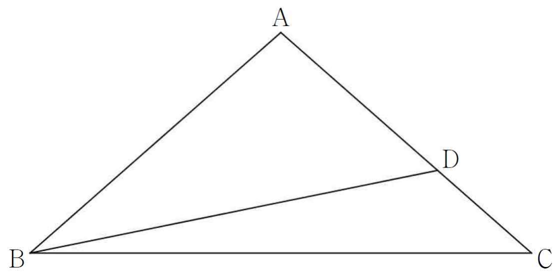
53. 함수 $f(x)=a\sin\pi x+b$ $(0\le x\le 2)$에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 t의 값의 범위가 $0<t\le 1$일 때, a^2+b^2의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

03 수1 07 삼각함수의 활용
02 사인법칙과 코사인법칙의 활용
02 활용2 (사인법칙의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

54. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.
$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은?

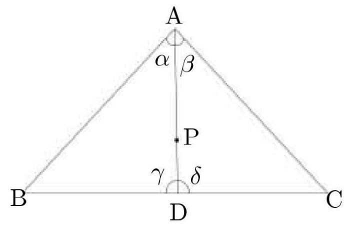


① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 06월 15

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 06월 15

55. 세 변의 길이가 모두 다른 $\triangle ABC$의 내부의 점 P에서 변 AB, BC, CA까지의 거리를 각각 p, q, r이라 하자.
다음은 $p\overline{AB}=q\overline{BC}=r\overline{CA}$이면 점 P가 $\triangle ABC$의 $\boxed{(가)}$ 임을 증명한 것이다.



i) 점 A에서
선분 AP의 연장선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하자.
사인 법칙에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{DC}}{\sin\beta}=\frac{\overline{CA}}{\sin\delta}$$

따라서

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\overline{CA}\sin\beta}=\boxed{(나)}$$

따라서 선분 AD는 $\triangle ABC$의 $\boxed{(다)}$이다.
ii) 점 B, C에서도
위와 같은 방법으로 증명하면,
점 P가 $\triangle ABC$의 $\boxed{(가)}$임을 알 수 있다.

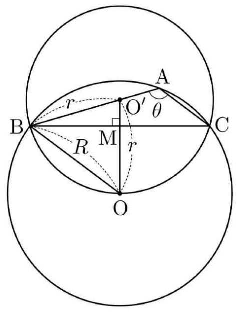
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	내심	1	각의 이등분선
②	수심	2	수선
③	수심	1	수선
④	무게중심	2	중선
⑤	무게중심	1	중선

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 21

56. $\angle BAC=\theta\left(\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{3}{4}\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB위에 있을 때, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$$

세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면

$$\overline{O'M}=r-\overline{OM}=r-|R\cos\theta|$$

직각삼각형 O′BM에서 $R=\boxed{(가)}\times r$이므로

$$\sin(\angle O'BM)=\boxed{(나)}$$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여

$$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

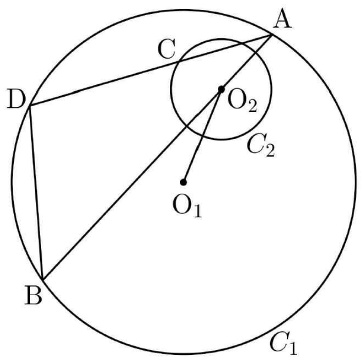
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

06 활용6 (Mm)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

57. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{O_1}$이고 반지름의 길이가 $r\ (r>3)$인 원 C_1과 중심이 $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 $\mathrm{AO_2}$가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자.



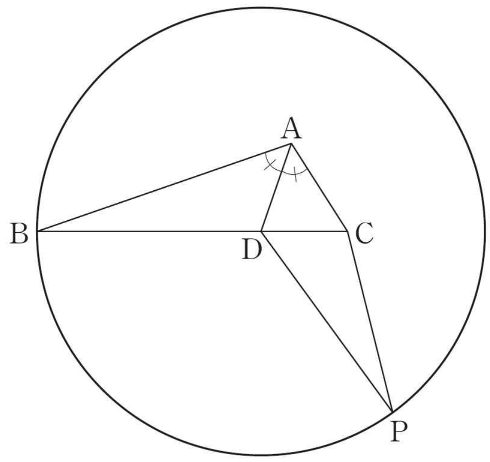
다음은 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{\mathrm{O_1C}}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin A}=\boxed{(가)}$$
>
> 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.
>
> 이때 직각삼각형 $\mathrm{ACO_2}$에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}$이므로
>
> $$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}\times\boxed{(가)}$$
>
> 이다.
>
> 그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{\mathrm{AO_2}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{BD}}$는 최대이다.
>
> $\overline{\mathrm{AO_2}}$의 최솟값은
>
> $\boxed{(나)}$
>
> 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대일 때,
>
> $$\overline{\mathrm{O_1C}}^2=\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은?

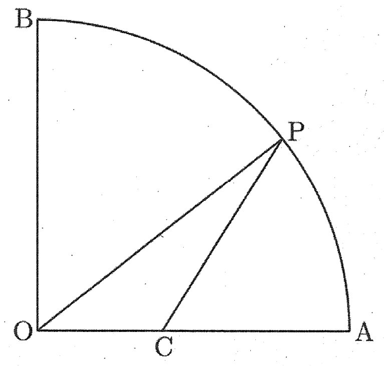
① 216 ② 192 ③ 168
④ 144 ⑤ 120

58. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=1$인 삼각형 ABC에 대하여 ∠BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원 위의 점 P에 대하여 cos(∠DPC)의 최솟값은?



① $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{26}}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
④ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

59. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 5인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA를 $2:3$으로 내분하는 점 C와 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle$CPO의 크기가 최대일 때, 삼각형 OCP의 둘레의 길이는 $a+\sqrt{b}$이다. 자연수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

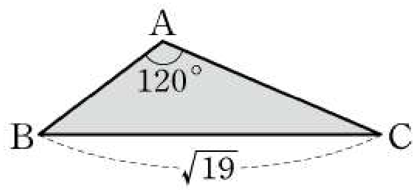


03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

06 넓이6 (각 표시)

60. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{19}$, $A=120^\circ$ 이고, $\overline{AB}+\overline{AC}=7$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하면?



① $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

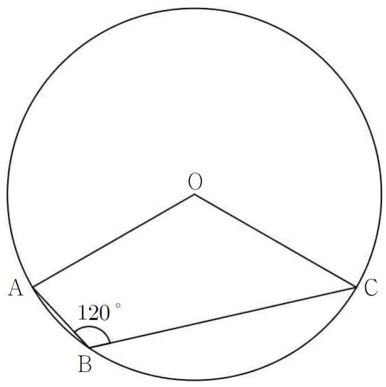
④ $\frac{17\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

61. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$\angle ABC = 120°$, $\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는?

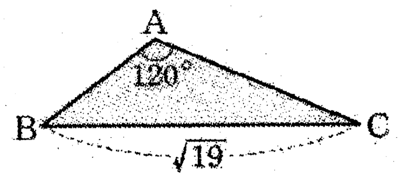


① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

62. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{19}$,

$A=120°$ 이고 $\overline{AB}+\overline{AC}=7$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

63. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_5 = a_1$, $S_{10} = 40$일 때, a_{10}의 값은?

① 10 ② 13 ③ 16
④ 19 ⑤ 22

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

64. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_6 = 2(S_3 - S_2)$일 때, S_{10}의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 26

65. 공차가2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

03 합3 (합에 대한 성질)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 21

66. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6+a_7=-\frac{1}{2}$

(나) $a_l+a_m=1$ 이 되도록 하는 두 자연수 l, $m(l<m)$의 모든 순서쌍 (l, m)의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오.

67. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, <조건>을 모두 만족시키는 자연수 k의 값은? (단, $k>5$)

ㄱ. $a_{k-3}=29$

ㄴ. $a_3+a_5=22$

ㄷ. $S_k=k^2+100$

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

68. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3=38$일 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은? (단, $n\geq 3$)

(가) $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=142$

(나) $S_n=390$

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

03 수1 08 등차수열

03 등차수열의 추론과 함수적 해석

01 추론1 (등차수열의 결합과 합성)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

69. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(m+2)$개의 수
> $a,\ \log_2 c_1,\ \log_2 c_2,\ \log_2 c_3,\ \cdots,\ \log_2 c_m,\ b$
> 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
>
> (나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제 m항까지의 항을 모두 곱한 것은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 14

70. 함수 $f(x)=\log_4 x$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 양수 x에 대하여 $f\left(\frac{x}{4}\right)=f(x)+1$이다.

ㄴ. 수열 $\{f(2^n)\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $x>1$일 때, $f(f(x))>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

71. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수
a, $\log_2 c_1$, $\log_2 c_2$, $\log_2 c_3$, $\cdots$, $\log_2 c_m$, b가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

02 시그마의 뜻2 (등차수열)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 9

72. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$$

라 하자. $\frac{S_{10}}{T_{10}}=6$일 때, T_{37}의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 15

73. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 165,\ \sum_{k=1}^{21}(-1)^k a_k = -20$$

을 만족시킬 때, a_{21}의 값은?

① 45 ② 50 ③ 55

④ 60 ⑤ 65

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 20

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 20

74. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 + b_1 = 45,\ \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 500$$

일 때, $a_{10} + b_{10}$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

04 시그마의 성질1 (기본성질)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

75. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2 a_k = 100,\ \ \sum_{k=1}^{10} k(k+1)a_k = 23$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

76. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{20}(2a_k+5b_k)=370,\ \sum_{k=1}^{20}\left(a_k+2b_k+\frac{1}{4}b_k^2\right)=185$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{20}(1-b_k)^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 03 수열 유형7

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 03 수열 유형7

77. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=6,\ \sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

05 활용2 (일반항 구하기. 함수와 도형)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

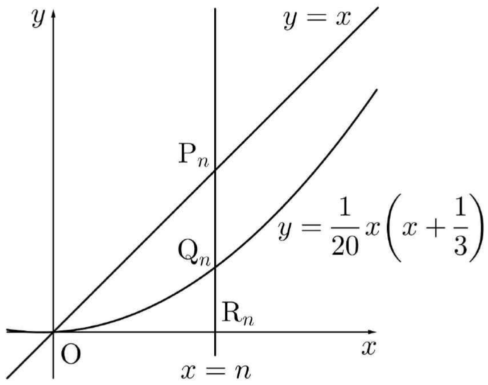
78. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=n$이 곡선 $y=x^2$와 만나는 점을 $\mathrm{A_n}$, 직선 $x=n$이 직선 $y=-2x$와 만나는 점을 $\mathrm{B_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9}\overline{\mathrm{A}_n B_n}$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

79. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 P_n, 곡선 $y=\dfrac{1}{20}x\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$과 만나는 점을 Q_n, x축과 만나는 점을 R_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 길이 중 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

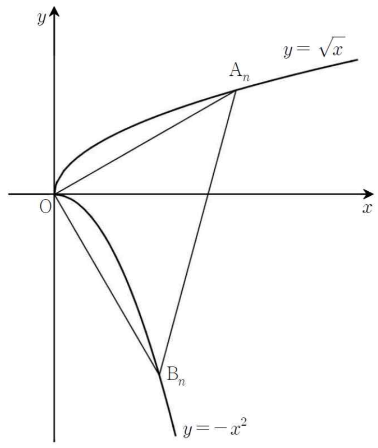
① $\dfrac{115}{6}$ ② $\dfrac{58}{3}$ ③ $\dfrac{39}{2}$

④ $\dfrac{59}{3}$ ⑤ $\dfrac{119}{6}$



[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

80. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A_n}(\mathrm{n}^2,\ \mathrm{n})$과 곡선 $y=-x^2\ (x\geq 0)$위의 점 $\mathrm{B_n}$이 $\overline{\mathrm{OA_n}}=\overline{\mathrm{OB_n}}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A_nOB_n}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

07 활용4 (추론, 규칙적인 변화)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

81. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn \ (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20} = 199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 21

82. 수열 $\{a_n\}$은 15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 모두 나열하여 만든 것이다. 예를 들면 $a_2 = 2$, $a_4 = 7$이다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 10

83. 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 3으로 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이다.

$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots$

이때 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① 675 ② 685 ③ 695
④ 705 ⑤ 715

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

10 점화식10 (주기수열)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

84. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2-a_n} & (a_n>2)\\ a_n+2 & (a_n\le 2)\end{cases}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k=12$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

85. 첫째항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n & (a_n<0)\\ a_n-1 & (a_n\ge 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. 두 집합

$A=\{n \mid a_n=a_{n+2},\ n\text{은 자연수}\}$,

$B=\{m \mid m\text{은 } 11\text{이상의 자연수}\}$

에 대하여 $A=B$일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 21

86. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n\ge 0)\\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오.

03 수1

11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

11 점화식11 (여러가지 점화식)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

87. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{3}{2}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

88. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1}=-a_n+3a_{n+1}$

(나) $a_{2n+2}=a_n-a_{n+1}$

$a_1=1$, $a_2=2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 15

89. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{2n}=a_3\times a_n+1,\ a_{2n+1}=2a_n-a_2$$
> 이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① -53 ② -51 ③ -49
④ -47 ⑤ -45

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 19

90. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=2a_n,\ a_{2n+1}=3a_n$$

을 만족시킨다. $a_7+a_k=73$인 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

91. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+2}{2} & (a_n\text{은 짝수})\\[2mm] \dfrac{a_n-1}{2} & (a_n\text{은 홀수})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 38 ② 42 ③ 46
④ 50 ⑤ 54

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

92. 수열 $\{a_n\}$은 a_1이 자연수이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-d & (a_n \geq 0) \\ a_n+d & (a_n<0) \end{cases} \quad (d\text{는 자연수})$$

이다. $a_n<0$인 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=3$
>
> (나) $a_1+a_{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$
>
> (다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k=45$

a_1의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$)

03 수1 11 수학적귀납법

02 수학적 귀납법

03 수학적 귀납법3 (부등식)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

93. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때,
>
> (좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \leq \frac{(2m)!}{2^m}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
>
> $$\leq \frac{(2m)!}{2^m}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
>
> $$=\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{\boxed{(다)}}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$
>
> $$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

[출처]　2007 모의_공공 평가원 고3 06월 14

94. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}<\frac{2}{n+1}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}$$

이라 할 때, $a_n<\frac{2}{n+1}$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, $a_1=\frac{1!}{2!}=\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n=k$일 때, $a_k<\frac{2}{k+1}$라고 가정하면 $n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$=\boxed{(가)}(1+a_k)$$

$$<\boxed{(가)}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\boxed{(나)}$$

이다.

자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k+1}\le 1$이므로

$\boxed{(나)}\le\frac{1}{k+2}$이고 $a_{k+1}<\frac{2}{k+2}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.
그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
②	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
④	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
⑤	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)^2}$

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

95. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}<\frac{2}{n+1}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}$$

이라 할 때, $a_n<\frac{2}{n+1}$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, $a_1=\frac{1!}{2!}=\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n=k$일 때, $a_k<\frac{2}{k+1}$라고 가정하면

$n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$=\boxed{(가)}(1+a_k)$$

$$<\boxed{(가)}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\boxed{(나)}$$

이다.

자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k+1}\le 1$이므로

$\boxed{(나)}\le\frac{1}{k+2}$이고 $a_{k+1}<\frac{2}{k+2}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
②	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
④	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
⑤	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)^2}$

[유형별한글] [수학1] 사관학교
최근5개년(빠른 정답)

작업공간 2022.12.14

1. [정답] ③
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] ④
5. [정답] 12

6. [정답] ③
7. [정답] ②
8. [정답] ④
9. [정답] ⑤
10. [정답] ④

11. [정답] 8
12. [정답] ③
13. [정답] ②
14. [정답] ④
15. [정답] ②

16. [정답] ③
17. [정답] 9
18. [정답] ④
19. [정답] ④
20. [정답] ③

21. [정답] ⑤
22. [정답] 75
23. [정답] ②
24. [정답] 16
25. [정답] ⑤

26. [정답] ①
27. [정답] 4
28. [정답] ③
29. [정답] 26
30. [정답] ①

31. [정답] 33
32. [정답] ④
33. [정답] ②
34. [정답] ④
35. [정답] ②

36. [정답] ①
37. [정답] ②
38. [정답] ④
39. [정답] ④
40. [정답] 9

41. [정답] 4
42. [정답] ③
43. [정답] $x=\frac{4}{3}\pi$
44. [정답] ②
45. [정답] ⑤

46. [정답] ④
47. [정답] ⑤
48. [정답] 12
49. [정답] 2π
50. [정답] ⑤

51. [정답] ⑤
52. [정답] (1) 20 (2) 176
53. [정답] ④
54. [정답] ③
55. [정답] ⑤

56. [정답] 27
57. [정답] ④
58. [정답] ⑤
59. [정답] 147
60. [정답] ③

61. [정답] ⑤
62. [정답] $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
63. [정답] ②
64. [정답] ②
65. [정답] 7

66. [정답] 35
67. [정답] ⑤
68. [정답] ③
69. [정답] ③
70. [정답] ②

71. [정답] 10
72. [정답] ③
73. [정답] ②
74. [정답] 55
75. [정답] 8

76. [정답] 20
77. [정답] 10
78. [정답] 375
79. [정답] ⑤
80. [정답] 395

81. [정답] 282
82. [정답] ①
83. [정답] ①
84. [정답] ③
85. [정답] 60

86. [정답] 5
87. [정답] ②
88. [정답] ①
89. [정답] ①
90. [정답] 64

91. [정답] ④
92. [정답] 17
93. [정답] ②
94. [정답] ②
95. [정답] ②

[유형별한글] [수학1] 사관학교 최근5개년(해설)

작업공간 2022.12.14

1) [정답] ③

[해설]

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}=2^{\frac{6}{m}}\times3^{\frac{4}{n}}$가 자연수가 되려면 m은 6의 약수, n은 4의 약수이어야 한다.
m, n은 2이상의 자연수이어야 하므로 m은 2, 3, 6으로 3가지
n은 2, 4로 2가지
따라서 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $3\times2=6$

2) [정답] ①

[해설]

$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{n}}=3^{-\frac{8}{n}}$이 정수가 되려면 n은 8의 음의 약수이다.

$n=-1,\ -2,\ -4,\ -8$

따라서 4개다.

3) [정답] ①

[해설]

$(abc)^{2n}$이 자연수가 되려면 $2n$은 6, 5, 3의 최소공배수인 30의 배수이어야 하므로 n의 최솟값은 15이다.

4) [정답] ④

[해설]

$9^a=2^{\frac{1}{b}}$에서 $3^{2ab}=2$,

$(a+b)^2=\log_3 64$에서 $3^{(a+b)^2}=64=2^6$, 즉 $3^{\frac{(a+b)^2}{6}}=2$

$2ab=\frac{(a+b)^2}{6}$, $a^2-10ab+b^2=0$,

$t=\frac{a}{b}$라 하면 $a>b>0$에서 $t>1$이고

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-10\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$, $t^2-10t+1=0$, $t=5+2\sqrt{6}$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{t-1}{t+1}=\frac{4+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

5) [정답] 12

[해설]

$\frac{a}{\log_a b}=\frac{3}{4\log_b a}=\frac{a+3}{4}$이 성립하므로

$\frac{a}{\log_a b}=\frac{a+3}{4}$에서 $\frac{4a}{a+3}=\log_a b$ ……①

$\frac{3}{4\log_b a}=\frac{a+3}{4}$에서 $\frac{a+3}{3}=\log_a b$ ……②

①, ②에서 $\frac{4a}{a+3}=\frac{a+3}{3}$, $(a+3)^2=12a$

$a^2-6a+9=0$, $(a-3)^2=0$에서 $a=3$(중근)

$\log_3 b=2$에서 $b=9$

따라서 $a+b=3+9=12$

6) [정답] ③

[해설]

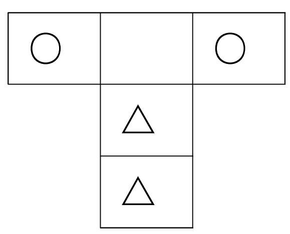
$\frac{m}{n}\log_a b=4$, $\frac{n}{m}\log_a b=8$에서

$2m^2=n^2$, $\frac{n}{m}=\sqrt{2}$

$\therefore \log_2\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$

7) [정답] ②

[해설]



그림에서 가로와 세로의 합이 모두 같아야 하므로 ○와 △끼리의 합이 동일해야 한다.

따라서 $(\log_a 2,\ \log_a 128)$, $(\log_a 8,\ \log_a 32)$로 짝지어서 ○, △에 써 넣으면 된다.

$$\log_a 2+\log_a 128+\log_a 4=15,\ \log_a 2^{10}=15$$

$$a^{15}=2^{10}$$

$$\therefore\ a=2^{\frac{2}{3}}$$

8) [정답] ④

[해설]

직선 OA가 곡선 $y=x^2+1$과 점 A에서만 만나고, $\log_2 A>0$이므로 점 A는 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점이면서 직선 OA와의 접점이다.

즉, 직선 OA는 곡선 $t=x^2+1$위의 점 A에서의 접선이다.

곡선 $y=x^2+1$위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=2\log_2 a(x-\log_2 a)+\log_2 b$이고 이 직선이 원점을 지나므로 $0=2\log_2 a(0-\log_2 a)+\log_2 b$에서 $2(\log_2 a)^2=\log_2 b$이다.

또한, 점 A가 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점이므로 $\log_2 b=(\log_2 a)^2+1$이고,

$\log_2 b=\dfrac{\log_2 b}{2}+1$에서 $\log_2 b=2,\ b=4$이다.

9) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=4^x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는

$$y=4^{x-a}-1+b$$

따라서 $y=2^{2x-2a}-1+b=2^{2x-3}+3$이므로

$$a=\frac{3}{2},\ b=4$$

$$\therefore\ ab=6$$

10) [정답] ④

[해설]

$y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=2^{2(x-p)}+3$

이것은 $y=16\times 2^{2x}+3=2^{2x+4}+3$과 같으므로

$p=-2$

11) [정답] 8

[해설]

$$y=9(3^{x-1}+1)=9\times 3^{x-1}+9$$

$=3^2\times 3^{x-1}+9=3^{x+1}+9$

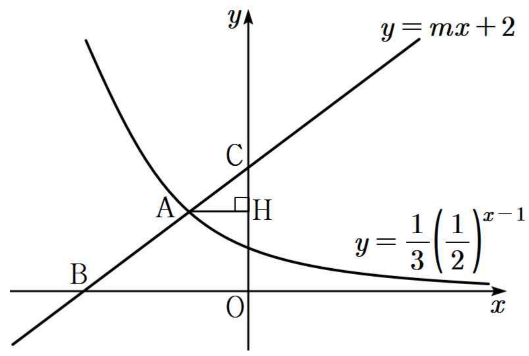
이므로 이 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-1,\ b=9$이므로

$$a+b=-1+9=8$$

12) [정답] ③

[해설]



점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle CBO \backsim \triangle CAH$

이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$에서 $\overline{CH}:\overline{HO}=1:2$

따라서 $H\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$이다.

점 A의 y좌표가 $\dfrac{4}{3}$이므로 곡선 $y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$에 대입하면

$\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1},\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}=4$

따라서 $x=-1$이므로 $A\left(-1,\ \dfrac{4}{3}\right)$이다.

점 $A\left(-1,\ \dfrac{4}{3}\right)$는 직선 $y=mx+2$ 위의 점이므로 대입하면

$\dfrac{4}{3}=-m+2\qquad \therefore m=\dfrac{2}{3}$

13) [정답] ②

[해설]

$y=f(x)$는 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선이므로 $f(x)=-2^x+m$이다.

$y=-2^x+m$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $y=0$일 때,

$-2^x+m=0$, $2^x=m$

$\therefore$ $x=\log_2 m$

$\therefore$ $\mathrm{A}(\log_2 \mathrm{m},\ 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OA}}=\log_2 m$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\log_2 \mathrm{m}=\log_2\sqrt{\mathrm{m}}$

$\therefore$ $\mathrm{B}(\log_2\sqrt{m},\ \sqrt{m})$

점 B는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2^{\log_2\sqrt{m}}+m=\sqrt{m}$

$-\sqrt{m}+m=\sqrt{m}$

$m=2\sqrt{m}$

$m^2-4m=0$

$m(m-4)=0$

$\therefore$ $m=4\ (\because m>2)$

14) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $2^{x_1}=4^{a-x_1}$에서 $2^{x_1}=2^{2(a-x_1)}$

$x_1=2(a-x_1)$

$x_1=\frac{2}{3}a$

$2^{x_2-3}=4^{a-x_2}$에서 $2^{x_2-3}=2^{2(a-x_2)}$

$x_2-3=2(a-x_2)$

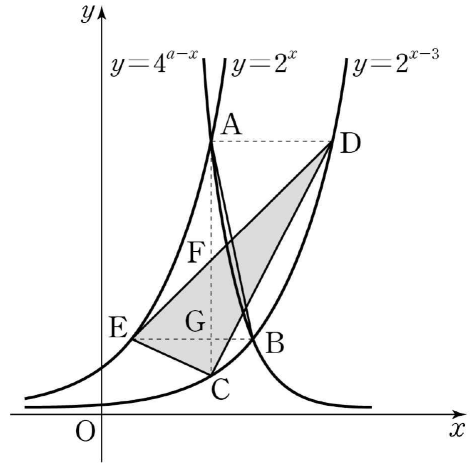
$x_2=\frac{2}{3}a+1$

$\therefore$ $x_2-x_1=\left(\frac{2}{3}a+1\right)-\frac{2}{3}a=1$ (참)

ㄴ. $y_1=2^{x_1}=2^{\frac{2}{3}a}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a,\ 2^{\frac{2}{3}a}\right)$

$y_2=2^{x_2-3}=2^{\frac{2}{3}a-2}=\frac{1}{4}\times 2^{\frac{2}{3}a}$이므로

점 B의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a+1,\ \frac{1}{4}\times 2^{\frac{2}{3}a}\right)$



위의 그림과 같이 두 선분 AC, BE가 만나는 점을 G라 하면 직각삼각형 AGB에서

$\overline{\mathrm{BG}}=x_2-x_1=1$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{26}$이므로 피타고라스정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AG}}^2+1^2=(\sqrt{26})^2$, $\overline{\mathrm{AG}}=5$

한편,

$\overline{\mathrm{AG}}=y_1-y_2=2^{\frac{2}{3}a}-\frac{1}{4}\times 2^{\frac{2}{3}a}=\frac{3}{4}\times 2^{\frac{2}{3}a}=5$에서

$2^{\frac{2}{3}a}=\frac{20}{3}$

따라서 점 A의 y좌표는 $y_1=\frac{20}{3}$이고 점 C의 y좌표는

$2^{\frac{2}{3}a-3}=\frac{1}{8}\times 2^{\frac{2}{3}a}=\frac{5}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{20}{3}-\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$ (거짓)

ㄷ. ㄴ의 그림에서 두 선분 AC, ED가 만나는 점을 F라 하자.

$\overline{\mathrm{BE}}=3$, $\overline{\mathrm{BG}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{EG}}=2$

$\overline{\mathrm{AG}}=5$이고 두 삼각형 FEG, FDA의 닮음비가

$2:3$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\overline{\mathrm{AG}}=3$

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{35}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AF}}=\frac{35}{6}-3=\frac{17}{6}$

따라서 삼각형 ECD의 넓이는 두 삼각형 ECF, FCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\overline{\mathrm{EG}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\overline{\mathrm{AD}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{17}{6}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{17}{6}\times 3$

$=\frac{85}{12}$ (참)

15) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $x=-1$을 대입하면 $|a^0-1|=0$ (참)

ㄴ. $x<-1$인 곳에서는 교점이 반드시 생긴다.

$x>0$인 곳에서 교점을 조사해 보면,

$a^x=1-a^{x-1}$, $a^x+a^{-x-1}=1$

이때 산술 기하 평균에서 $a^x+a^{-x-1}\geq 2\sqrt{a^{-1}}$ 이므로 $a=4$일 때 등호 성립조건에 부합한다.

따라서 $4^x=4^{-x-1}$ 즉, $x=-\frac{1}{2}$에서 접한다.

그러므로 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x<-1$에서의 교점은 -2보다 크고 -1보다 작다.

$x>-1$에서의 교점은 $a^x=1-a^{x-1}$을 풀어보면

$t=1-\frac{1}{at}$ ($\because a^x=t$로 치환) 즉, $at^2-at+1=0$

이때 $a^\alpha\times a^\beta=\frac{1}{a}=a^{-1}$이므로 두 근의 합은 -1이다.

따라서 모든 교점의 합은 -3과 -2사이이다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

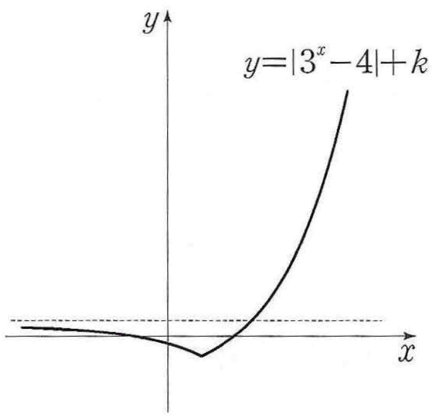
16) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=|3^x-4|+k$의 그래프를 그리기 위해 한 단계씩 차근차근 진행하는 것이 좋다. 즉,

$y=3^x\to y=3^x-4\to y=|3^x-4|\to y=|3^x-4|+k$

순으로 그려보자. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려보면 다음과 같다.



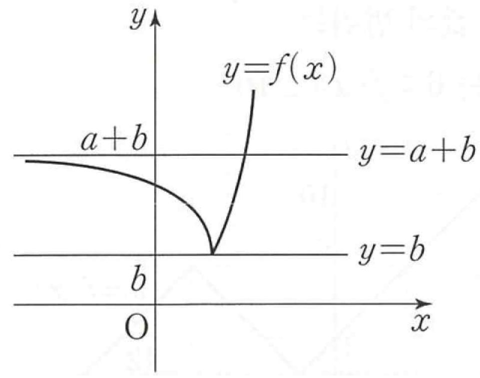
즉, 점근선의 y좌표가 양수이면서 $f(x)$의 최솟값이 음수가 되도록 하면 된다. 점근선의 방정식은 $y=4+k$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값은 k이다.

$\therefore\ 4+k>0,\ k<0\to -4<k<0\to 3$개

17) [정답] 9

[해설]

$f(x)=|3^x-a|+b$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$

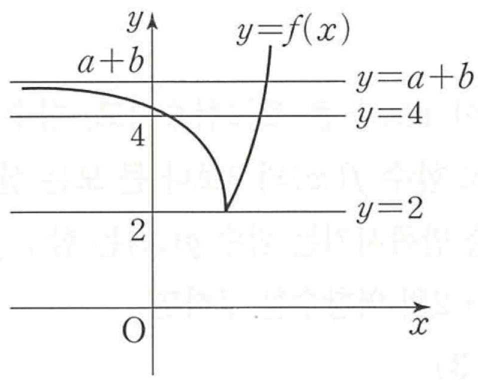
$(2^{f(x)})^2-20\times 2^{f(x)}+64=0$, $(2^{f(x)}-4)(2^{f(x)}-16)=0$

$2^{f(x)}=4$ 또는 $2^{f(x)}=16$

$f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$

(ⅰ) $b=2$일 때

직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



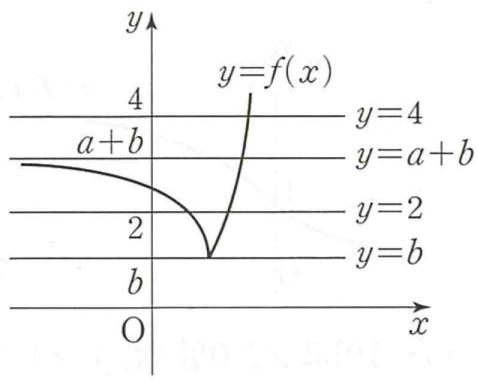
방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$a+b>4$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 2)$, $\cdots$, $(9,\ 2)$의 7개이다.

(ⅱ) $b\neq 2$일 때

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을

가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한 점에서 만나야 하므로

$b<2,\ 2<a+b\le 4$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$의 2개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$7+2=9$

18) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\left|\log_2(x-k)\right|$이므로

$\left|\log_2(x-k)\right|=\left|\log_2(-x+8)\right|$ …… ㉠

(ⅰ) $\log_2(x-k)=\log_2(-x+8)$일 때,

$x-k=-x+8$

$\therefore x=\dfrac{k+8}{2}$

(ⅱ) $\log_2(x-k)=-\log_2(-x+8)$일 때,

$\log_2(x-k)(-x+8)=0$

$-x^2+(k+8)x-8k=1$

$x^2-(k+8)x+8k-1=0$ …… ㉡

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$이 세 점에서 만나기 위해서는 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=k+8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 세 실근의 합이 18을 만족해야 하므로

$\dfrac{k+8}{2}+(k+8)=18,\ k+8=12$

$\therefore k=4$

[다른 풀이]

$f(x)=\left|\log_2(x-k)\right|$이므로 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$과 $x=\dfrac{k+8}{2}$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$이 세 점에서 만나므로 교점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\beta=\dfrac{k+8}{2},\ \dfrac{\alpha+\gamma}{2}=k+8$

을 만족한다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}(k+8)=18,\ k+8=12$

$\therefore k=4$

19) [정답] ④

[해설]

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프가

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프와 만나므로

$\log_2(x-3)-2=-\log_2 x$

$\log_2(x-3)+\log_2 x=2$

$\log_2(x^2-3x)=\log_2 4$

$x^2-3x-4=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-1$

로그의 진수 조건에 의해 $x=4$

$\therefore p=4,\ q=-2$

따라서 $p+q=2$

20) [정답] ③

[해설]

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x=\log_2 x-6$에서

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$이므로

$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$이다.

즉, $\log_2 x=2$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=4$ 또는 $x=8$이다.

따라서 두 점 A, B의 x좌표의 합은 12이다.

21) [정답] ⑤

[해설]

$y=\log_3 9x=2+\log_3 x$이므로 $\overline{BC}=2$, $\overline{AB}=2$

따라서 $A(a,\ b)$, $B(a+2,\ b)$이고, $b=\log_3 9a=\log_3(a+2)$

이것을 풀면 $3^b=9a=a+2,\ a=\dfrac{1}{4},\ 3^b=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ \ a+3^b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{5}{2}$

22) [정답] **75**

[해설]

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ k)$이고, 점 B의

좌표는 $(2k,\ k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서 $2k^2=1$이므로 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서

$\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$d=\beta-\alpha=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$

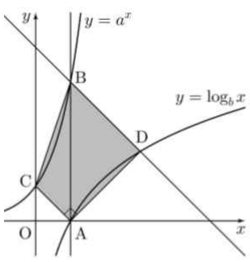
$=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}$

$=2^2-2^{-2}=\dfrac{15}{4}$

따라서 $20d=20\times\dfrac{15}{4}=75$

23) [정답] ②

[해설]



A(1, 0), B(1, a), C(0, 1), D(k, $k-1$)

$1+a=k+(k-1)$, $6=\dfrac{1}{2}\times a\times k$,

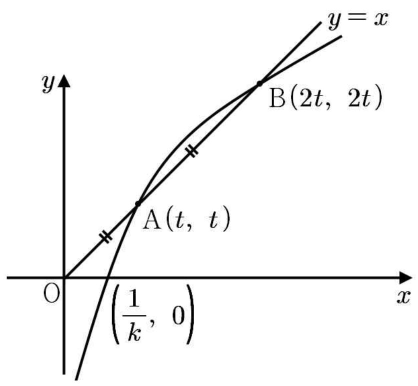
$k-1=\log_b k$

을 연립하여 풀면 $k=3$, $a=4$, $b=\sqrt{3}$

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

24) [정답] **16**

[해설]



그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}$이고, 두 점 A, B가 $y=x$위의 점이므로

두 점 A, B의 좌표는 A$(t,\ t)$, B$(2t,\ 2t)$이다.

$y=\log_2 kt$에 점 $(t,\ t)$, $(2t,\ 2t)$를 대입하면

$t=\log_2 kt$ …… ㉠

$2t=\log_2 2kt$ …… ㉡

㉠$\times 2$를 하면 $2t=2\log_2 kt$

$\therefore 2t=\log_2(kt)^2$ …… ㉢

㉡과 ㉢를 연립하면 $\log_2 2kt=\log_2(kt)^2$,

$(kt)^2=2kt$, $kt=2(\because\ kt>0)$

㉠에서 $kt=2$이므로 $t=\log_2 2=1$

$\therefore k=2$

$\therefore f(x)=\log_2 2x$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(5)=a$로 놓으면 $f(a)=5$이므로

$\log_2 2a=5$, $2a=2^5$

$\therefore a=16$

따라서 $g(5)=16$

25) [정답] ⑤

[해설]

$y=\log_2 x+a$, $y=2^{x-a}$는 역함수 관계이고

점 A의 x좌표를 p라고 하면 B의 x좌표는 $4p$,

그러므로 두 함수는 모두 $(p,\ p)$와 $(4p,\ 4p)$를 지난다.

$2^{p-a}=p$ …①

$2^{4p-a}=4p$ …②

②÷①을 하면 $2^{3p}=4$, $p=\dfrac{2}{3}$

$p=\dfrac{2}{3}$을 ①에 대입하면

$2^{\frac{2}{3}-a}=\frac{2}{3}$, $2^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\times 2^a$,

$2^a=3\times 2^{-\frac{1}{3}}$

$\overline{OB}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

그러므로 $\overline{OB}\times 2^a=\frac{8}{3}\sqrt{2}\times 3\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{19}{6}}$ 이다.

26) [정답] ①

[해설]

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $P(k,\ k)$, $Q(2k,\ 2k)$ 이다.

따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$ 이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$ 에서 $k=2$ 이다. $a^2=2$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

27) [정답] 4

[해설]

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)$에서 진수조건에 의해 $2x-5>0$이므로 $x>\frac{5}{2}$

$2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$이므로 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>-2$

$2x-5<9$, $2x<14$

$\therefore x<7$

$\therefore \frac{5}{2}<x<7$

따라서 만족하는 정수 x는 3, 4, 5, 6이고, 개수는 4개다.

28) [정답] ③

[해설]

진수 조건에서 $x-1>0$으로부터 $x>1$이고,

$\log_3(x-1)<2$

$x-1<3^2$, $x<10$ $\therefore$ $1<x<10$

이를 만족하는 정수 x는 2, 3, 4, ⋯, 9로 모두 8개이다.

29) [정답] 26

[해설]

진수조건에서 $x-3>0$ $\therefore$ $x>3$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3(x-3)<3=\log_3 3^3$에서 밑이 1보다 크므로

$x-3<27$ $\therefore$ $x<30$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3<x<30$이므로 정수 x의 개수는 26

30) [정답] ①

[해설]

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$에서 $1-x\leq 4x-4$

$\therefore x\geq 1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 4x<\log_2(x+k)$에서 $0<4x<x+k$

$\therefore 0<x<\frac{k}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x가 존재하지 않으므로

양수 k는 $0<\frac{k}{3}\leq 1$ $\therefore$ $0<k\leq 3$

따라서 최대가 되는 k의 값은 3

31) [정답] 33

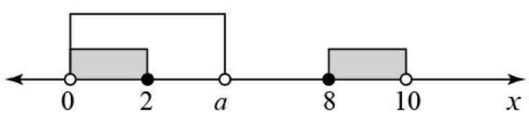
[해설]

(ⅰ) $\log_2 x+\log_2(10-x)\leq 4$에서 진수조건에서

$0<x<10$이고 $x^2-10x+16\geq 0$이므로

$\therefore$ $0<x\leq 2$, $8\leq x<10$ ⋯⋯ ㉠

(ⅱ) $x^2-ax<0$에서 $x(x-a)<0$ $\therefore$ $0<x<a$ ⋯⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 a값의 범위는 $2<a\leq 8$ 따라서 자연수 a의 값의 합은 33이다.

32) [정답] ④

[해설]

부등식 $\log_{\frac{1}{5}}(5x+3)\leq\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+k)$에서

로그의 진수 조건에 의해

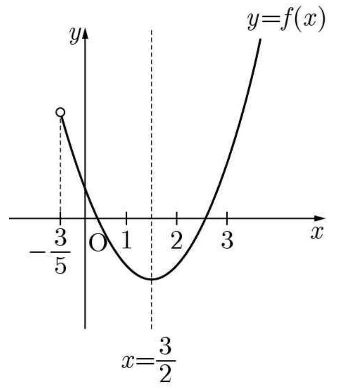
$5x+3>0$이고, $x^2+2x+k>0$이다.

$\therefore x>-\frac{3}{5}$ ($\because k>1$)

또한 밑이 $\frac{1}{5}$로 1보다 작으므로 $5x+3 \geq x^2+2x+k$이다.

즉, $f(x)=x^2-3x+k-3$라 할 때

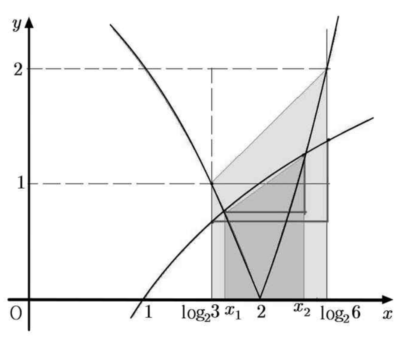
$x>-\frac{3}{5}$에서 $f(x) \leq 0$을 만족시키는 정수 x가 2개여야 한다.



따라서 $f(0)>0$이고, $f(1) \leq 0$이어야 한다.
$f(0)=k-3>0$, $f(1)=k-5 \leq 0$이므로
상수 k의 값의 범위는 $3<k \leq 5$이다.

33) [정답] ②

[해설]



ㄱ. 그림에서 $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$이 성립한다. (참)

ㄴ. 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이에서

$\frac{1}{2}(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 그림에서 빨간 직각삼각형의 높이에서

$(2^{x_2}-4)-(4-2^{x_1})<\log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$

$2^{x_1}+2^{x_2}<8+\log_2(\log_3 6)$

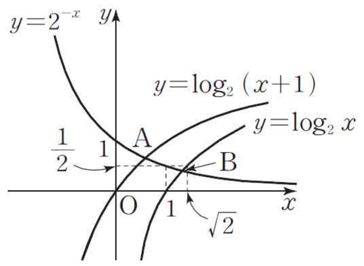
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34) [정답] ④

[해설]

ㄱ. 곡선 $y=2^{-x}$은 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고, 곡선 $y=\log_2(x+1)$은 원점 O와 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$은 직선 $y=\frac{1}{2}$의 위쪽에 있다.



따라서 $y_1=\log_2(x_1+1)>\frac{1}{2}$ 이므로 $x_1+1>2^{\frac{1}{2}}$

에서 $x_1>\sqrt{2}-1$ (거짓)

ㄴ. 곡선 $y=2^{-x}$은 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고,

$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ 이므로 곡선 $y=\log_2 x$는

점 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.

또 곡선 $y=\log_2 x$는 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 ㄱ의 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$는 두 직선 $x=1$과 $x=\sqrt{2}$ 사이에 있다.

따라서 $1<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=2^{-x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$에 대하여

ㄱ에서 $\sqrt{2}-1<x_1<1$ 이므로

$2^{-1}<y_1<2^{-(\sqrt{2}-1)}$ …… ㉠

ㄴ에서 $1<x_2<\sqrt{2}$ 이므로

$2^{-\sqrt{2}}<y_2<2^{-1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2^{-1}-2^{-1}<y_1-y_2<2^{-(\sqrt{2}-1)}-2^{-\sqrt{2}}$

이때

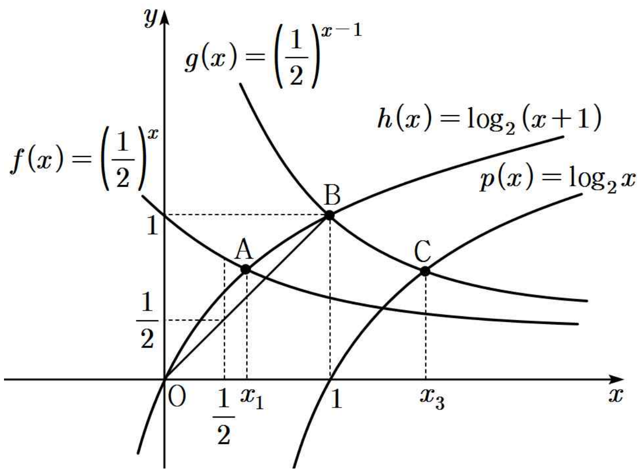
$2^{-(\sqrt{2}-1)}-2^{-\sqrt{2}}=2^{1-\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}$
$=2\times2^{-\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}$
$=(2-1)\times2^{-\sqrt{2}}$
$=2^{-\sqrt{2}}$

이므로 $0<y_1-y_2<2^{-\sqrt{2}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

35) [정답] ②

[해설]



ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1.4}{2}=0.7$

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}=\frac{\log 3}{\log 2}-1<\frac{0.48}{0.3}-1=0.6$

$f\left(\frac{1}{2}\right)>h\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \frac{1}{2}<x_1<1$ (참)

ㄴ. $y=f(x)$, $y=h(x)$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=g(x)$, $y=p(x)$이므로 점 A, C의 y좌표는 같다.

$\mathrm{A}\left(\mathrm{x}_1, \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{x}_1}\right)$, $\mathrm{C}(\mathrm{x}_3, \log_2 x_3)$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\log_2 x_3$

$\therefore 2^{-x_1}=\log_2 x_3$ (참)

ㄷ. 점 A, B 사이의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고

직선 $y=x$의 기울기와 비교하면 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

$\therefore y_2-y_1<x_2-x_1$ (거짓)

36) [정답] ①

[해설]

이차방정식 $5x^2-x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{5}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+\frac{2a}{5}=\frac{1}{25}$

$\therefore a=-\frac{12}{5}$

37) [정답] ②

[해설]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$…… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$…… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=a^2$

$1+2\times\frac{1}{2}=a^2$, $a^2=2$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta+\cos\theta=a>0$이므로

$a=\sqrt{2}$이다.

따라서

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

38) [정답] ④

[해설]

이차방정식 $4x^2+\sqrt{3}x+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ …㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{4}$ …㉡

이다. ㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{16}$에서

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{16}$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{13}{32}$이므로 ㉡에 의하여

$a=-\dfrac{13}{8}$이다.

39) [정답] ④

[해설]

$$f(x)=\cos^2x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$$

$=\cos^2x+4\sin x+3$

$=-\sin^2x+4\sin x+4$

$\sin x=t(-1\le t\le 1)$로 치환하면

$$y=-t^2+4t+4$$

이차함수의 축의 방정식이 $t=2$이므로 $t=1$일 때 최댓값

$-1+4+4=7$이다.

40) [정답] 9

[해설]

$\sin^2x=1-\cos^2x$, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로

$f(x)=\sin^2x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1$

$=1-\cos^2x+\cos x+1$

$=-\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로

함수 $f(x)$는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 $M=\dfrac{9}{4}$이므로

$4M=9$

41) [정답] 4

[해설]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$

$$\cos(2\pi-x)=\cos x$$

이므로

$f(x)=4-3\sin^2x-2\cos x$

$\quad=4-3(1-\cos^2x)-2\cos x$

$\quad=3\cos^2x-2\cos x+1$

$\quad=3\left(\cos x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

$-1\le\cos x\le 1$이므로

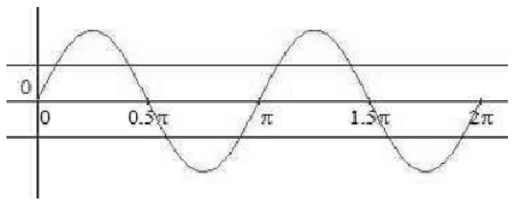
$\cos x=\dfrac{1}{3}$일 때, 최솟값 $m=\dfrac{2}{3}$를 갖고

$\cos x=-1$일 때, 최댓값 $M=3\left(-1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}=6$을 갖는다.

따라서 $Mm=6\times\dfrac{2}{3}=4$

42) [정답] ③

[해설]



$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $-\dfrac{1}{2}$이고, 그림과 같이 8개인데, 서로

$x=\pi$에 대하여 대칭이다.

따라서 8개의 근의 합은 8π이다.

43) [정답] $x=\dfrac{4}{3}\pi$

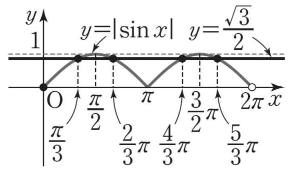
[해설]

$|\sin x|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수

$y=|\sin x|\,(0\le x<2\pi)$의 그래프와

직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의

x좌표이므로



$x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2}{3}\pi$, $x=\dfrac{4}{3}\pi$, $x=\dfrac{5}{3}\pi$

또, $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

방정식 $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$의 해는 함수 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

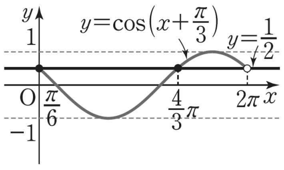
$(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표이므로

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$에서

$x=0$, $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$x=\frac{4}{3}\pi$



44) [정답] ②

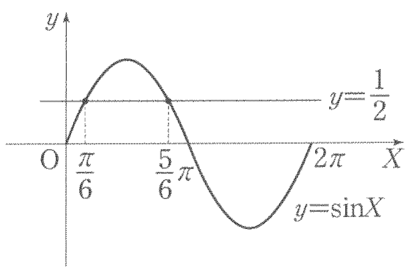
[해설]

절댓값이 있으므로 절댓값을 먼저 없애고 시작하자.

$$|\sin 2x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin 2x=-\frac{1}{2}$$

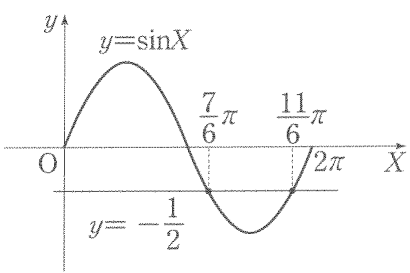
$\sin 2x=\frac{1}{2}$ $(0\le x\le \pi)$에서 두 실근을 찾자. $2x$가 헷갈리면 $2x=X$로 치환하고, $0\le X\le 2\pi$가 된다는 사실을 기억하자.

$\sin X=\frac{1}{2}$ $(0\le X\le 2\pi)$의 실근을 찾으면 다음 그래프와 같다.



$$X=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$$

$\sin X=-\frac{1}{2}$ $(0\le X\le 2\pi)$에서 두 실근을 찾으면 다음 그래프와 같다.



$$X=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \Leftrightarrow x=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

따라서 $\frac{\pi}{12}+\frac{5}{12}\pi+\frac{7}{12}\pi+\frac{11}{12}\pi=2\pi$

45) [정답] ⑤

[해설]

$(1-\sin^2 3x)-\sin 3x+1=0$

$\sin^2 3x+\sin 3x-2=0$

$(\sin 3x+2)(\sin 3x-1)=0$

$\sin 3x=1$, $3x=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi$

$x=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{9}{6}\pi$이므로 그 합은 $\frac{5}{2}\pi$

46) [정답] ④

[해설]

$2\cos^2 x+5\sin x+1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+5\sin x+1=0$; $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$;

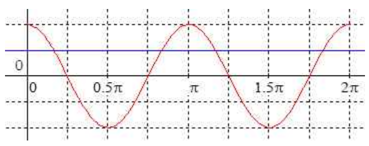
$(2\sin x+1)(\sin x-3)=0$; $\sin x=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\therefore\ \frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=3\pi$

47) [정답] ⑤

[해설]

$$\tan 2x\sin 2x=\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}=\frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}=\frac{3}{2}$$



$2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0$, $(2\cos 2x-1)(\cos 2x+2)=0$

$\cos 2x=\frac{1}{2}$

$x=\pi$에 대하여 서로 대칭인 두 쌍의 실근이므로

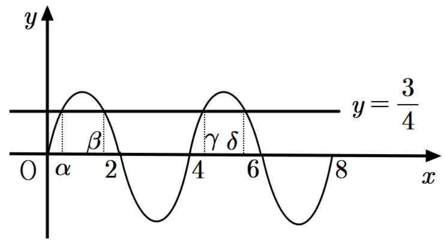
모든 해의 합은 4π이다.

48) [정답] 12

[해설]

$y=\sin\frac{\pi x}{2}$는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$이므로 주기는 4이다.

$0\le x\le 8$일 때 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{4}$을 만족시키는 해는 아래 그래프와 같이 α, β, γ, δ라 하자.



(i) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 두 값의 평균은 1이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$에서 $\alpha+\beta=2$이다.

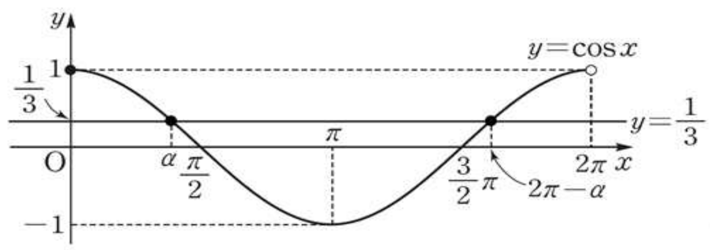
(ii) (i) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 γ, δ라 하면 두 값의 평균은 5이므로 $\frac{\gamma+\delta}{2}=5$에서 $\alpha+\beta=10$이다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2+10=12$

49) [정답] 2π

[해설]
주어진 방정식의 근은 함수 $y=\cos x$ $(0\leq x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$의 교점의 x좌표이므로

한 근을 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 다른 한 근은 $2\pi-\alpha$이다.



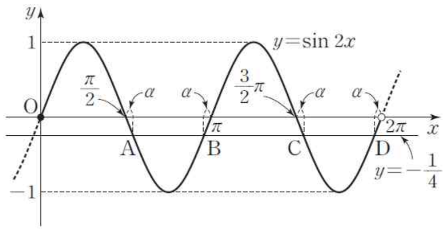
따라서 구하는 모든 근의 합은
$\alpha+(2\pi-\alpha)=2\pi$

50) [정답] ⑤

[해설]

방정식 $\sin 2x=-\frac{1}{4}$의 실근은 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=-\frac{1}{4}$의 교점의 x좌표와 같다.

곡선 $y=\sin 2x$와 직선$y=-\frac{1}{4}$은 그림과 같다.



즉, $0\leq x<2\pi$일 때 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=-\frac{1}{4}$은 서로 다른 네 점 A, B, C, D에서 만난다.

점 A의 x좌표를 $\frac{\pi}{2}+\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

점 B의 x좌표는 사인함수의 그래프의 대칭선에 의해서 $\pi-\alpha$이다.

또한 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 두 점 C, D의 x좌표는 각각 $\frac{3}{2}\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$이다.

따라서 방정식 $\sin 2x=-\frac{1}{4}$의 실근은

$$x=\frac{\pi}{2}+\alpha,\ x=\pi-\alpha,\ x=\frac{3}{2}\pi+\alpha,\ x=2\pi-\alpha$$

이므로 모든 실근의 합은

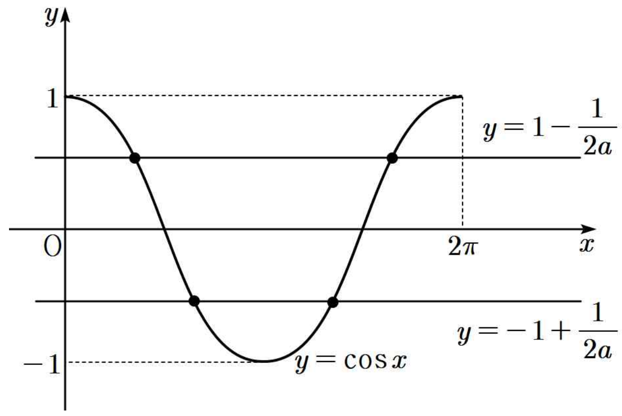
$$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+(\pi-\alpha)+\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+(2\pi+\alpha)=5\pi$$

51) [정답] ⑤

[해설]
(i) $(a-2)(b-2)=0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{b}{2}}=\frac{2\pi}{b}$이므로

조건 (가)에서
$\frac{2\pi}{b}=\pi\qquad\therefore b=2$
$|2a\cos x|=2a-1$에서
$2a\cos x=2a-1$ 또는 $2a\cos x=-2a+1$
이므로
$\cos x=1-\frac{1}{2a}$ 또는 $\cos x=-1+\frac{1}{2a}$



자연수 a에 대하여 $0<1-\frac{1}{2a}<1$,

$-1<-1+\frac{1}{2a}<0$이므로 $0 \le x \le 2\pi$에서

$\cos x=1-\frac{1}{2a}$와 $\cos x=-1+\frac{1}{2a}$은 각각 2개의 근을 가지므로 10 이하의 자연수 a에 대하여 항상 4개의 실근을 갖는다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 10이다.

(ii) $(a-2)(b-2) \neq 0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{b}{2}}=\pi$에서 $b=4$

$f(x)=|2a\cos 2x-2(a-2)|$이므로

$|2a\cos 2x-2(a-2)|=2a-1$에서

$2a\cos 2x-2a+4=-2a+1$ 또는

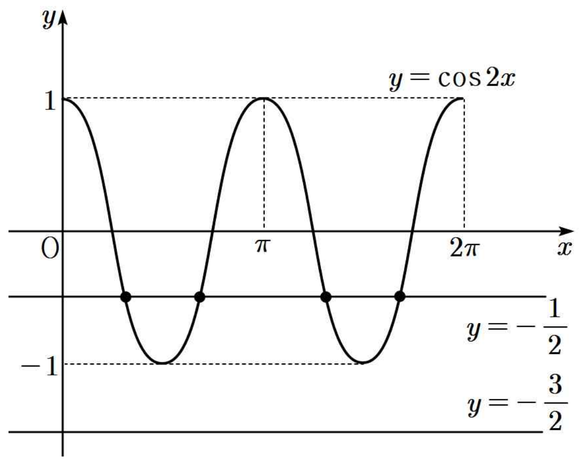
$2a\cos 2x-2a+4=2a-1$

$\therefore 2a\cos 2x=-3$ 또는 $2a\cos 2x=4a-5$ …… ㉠

㉠에서

(1) $a=1$일 때,

$\cos 2x=-\frac{3}{2}$ 또는 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

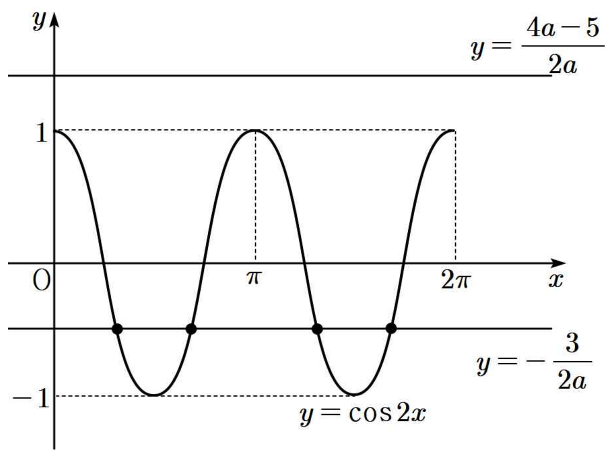


$\cos 2x=-\frac{3}{2}$을 만족하는 x의 값은 존재하지 않고,

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$을 만족하는 x의 값은 4개 존재하므로 조건을 만족한다.

(2) $a \ge 3$일 때,

$\cos 2x=-\frac{3}{2a}$ 또는 $\cos 2x=\frac{4a-5}{2a}$



$4a-5>2a$에서 $\frac{4a-5}{2a}>1$이므로

$\cos 2x=\frac{4a-5}{2a}$를 만족하는 x의 값은 존재하지 않는다.

$2a>3$에서 $-1<-\frac{3}{2a}<0$이므로 $\cos 2x=-\frac{3}{2a}$를 만족하는 x의 값은 4개 존재한다.

모두 4개의 실근을 가지므로 조건을 만족한다.

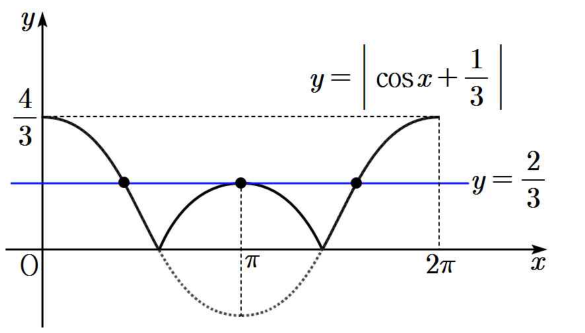
따라서 $b=4$이고 $a=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 9개다.

(i), (ii)에서 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $10+9=19$개다.

52) [정답] (1) **20** (2) **176**

[해설]

(1) $y=\left|\cos x+\frac{1}{3}\right|$의 그래프를 그려서 상수함수 $y=k$와 3개의 교점을 갖는 경우를 확인해보자.



따라서 $k=\frac{2}{3}$일 때 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

$\therefore\ 30\alpha=20$

(2) $5^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{6}}=\sqrt[n]{k}$

$k=5^{\frac{5n}{6}}$이므로 k가 자연수이려면 $5n$이 6의 배수이다.

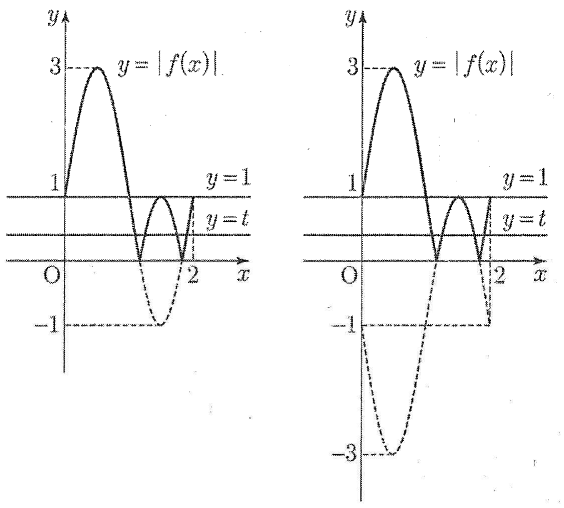
주어진 범위에서 n의 최댓값은 96이고 $k=5^{80}$

$\therefore\ n+\log_5 k=96+80=176$

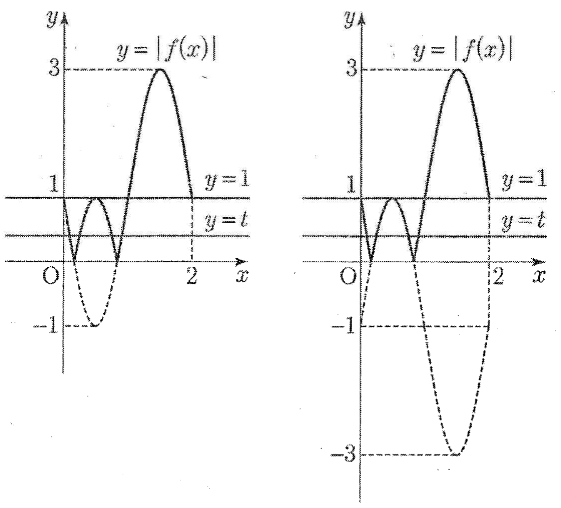
53) [정답] ④

[해설]

$f(x)=a\sin\pi x+b\ (0\le x\le 2)$에 대하여 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=t$의 서로 다른 교점의 개수가 4인 t의 값의 범위가 $0<t\le 1$이므로 곡선 $y=|f(x)|$는 그림과 같다.



$f(x)=2\sin\pi x+1$　　$f(x)=-2\sin\pi x-1$



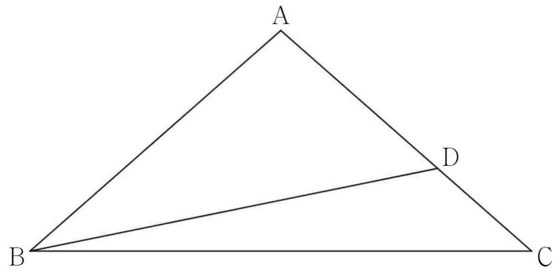
$f(x)=-2\sin\pi x+1$　　$f(x)=2\sin\pi x-1$

따라서 $a=\pm2$, $b=\pm1$이므로

$a^2+b^2=5$

54) [정답] ③

[해설]



삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin C=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}$$

마찬가지로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)}{\overline{AD}}$$

조건에서 $\overline{AD}:\overline{DC}=5:3$이고

$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$

즉, $\sin(\angle ABD):\sin(\angle DBC)=5:2$이므로

$$\therefore\ \frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\overline{BD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)}$$

$$=\frac{\overline{AD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}\times\sin(\angle ABD)}$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{3}$$

55) [정답] ⑤

[해설]

i) 점 A에서

선분 AP의 연장선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하자.

사인 법칙에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma},\ \frac{\overline{DC}}{\sin\beta}=\frac{\overline{CA}}{\sin\delta}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}\sin\alpha\sin\delta}{\overline{CA}\sin\beta\sin\gamma}$$

$\sin\delta=\sin(\pi-\gamma)=\sin\gamma$이므로

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\overline{CA}\sin\beta}=\frac{\overline{AB}\cdot\frac{p}{\overline{AP}}}{\overline{CA}\cdot\frac{r}{\overline{AP}}}=1$$

$\overline{BD}=\overline{DC}$

따라서 선분 AD는 $\triangle ABC$의 중선이다.

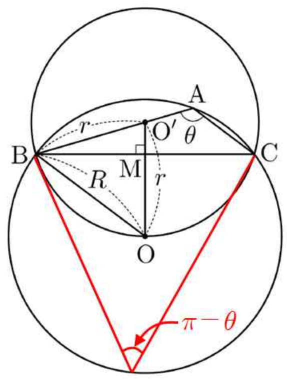
ii) 점 B, C에서도

위와 같은 방법으로 증명하면,

점 P가 $\triangle ABC$의 무게중심임을 알 수 있다.

56) [정답] 27

[해설]



□BACQ는 원 위에 내접하는 사각형이므로

$\angle \mathrm{BQC}=\pi-\theta$

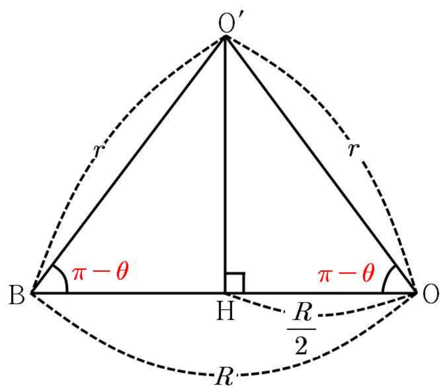
$\angle \mathrm{BQC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 의 원주각이고 $\angle \mathrm{BOC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 의 중심각이므로

$\angle \mathrm{BOC}=2\pi-2\theta$

$\triangle \mathrm{BOM} \equiv \triangle \mathrm{COM}$이므로 $\angle \mathrm{O'OB}=\pi-\theta$이고

$\angle \mathrm{BO'O}=2\theta-\pi$이다.

(i)



$\triangle \mathrm{O'BO}$는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{O'BO}=\angle \mathrm{O'OB}=\pi-\theta$

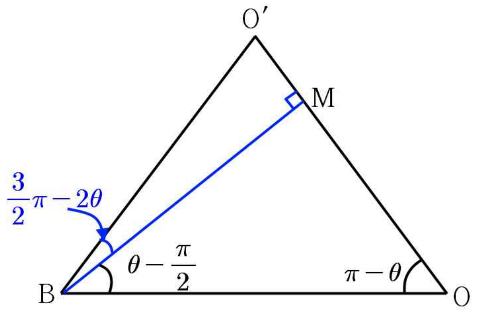
점 O′에서 $\overline{\mathrm{BO}}$에 수선을 긋고, 수선의 발을 H라고 하면 $\triangle \mathrm{O'OH}$에서

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\frac{R}{2}}{r},\quad -\cos\theta=\frac{\frac{R}{2}}{r},\quad \frac{R}{2}=-r\cos\theta$$

$\therefore R=-2\cos\theta r$

따라서 (가)는 $-2\cos\theta$ …… ㉠

(ii)



$\triangle \mathrm{BO'M}$에서

$\angle \mathrm{O'BM}+\angle \mathrm{BMO'}+\angle \mathrm{MO'B}=\pi$

$\angle \mathrm{O'BM}+\frac{\pi}{2}+2\theta-\pi=\pi$

$\angle \mathrm{O'BM}=\frac{3}{2}\pi-2\theta$

$\triangle \mathrm{O'BM}$에서

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\theta\right)=-\cos2\theta$

따라서 (나)는 $-\cos2\theta$ …… ㉡

(iii) $\triangle \mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{O'BM})},\quad \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$$

따라서 (다)는 $\dfrac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$ …… ㉢

즉, ㉠, ㉡, ㉢에서

$$f(\theta)=-2\cos\theta,\ g(\theta)=-\cos2\theta,\ h(\theta)=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$$

그런데, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2$$

$$=\frac{6}{5}+1-2\times\frac{2}{5}+3$$

$$=\frac{22}{5}$$

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{22}{5}$에서 $p=5$, $q=22$이므로

$p+q=2+5=27$

57) [정답] ④

[해설]

삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin A}=\boxed{2r}$

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

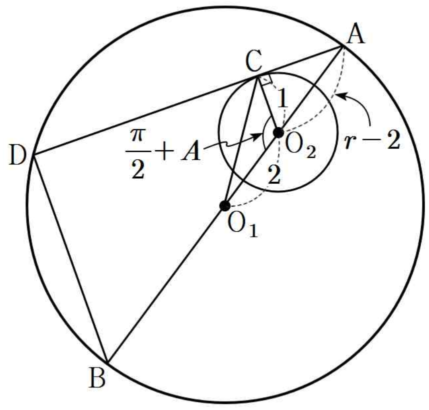
이때 직각삼각형 $\mathrm{ACO_2}$에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}\times\boxed{2r}$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{\mathrm{AO_2}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{BD}}$는 최대이다. $\overline{\mathrm{AO_2}}$가 최소일 때는 두 원의 중심 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$와 점 A가 일직선 위에 있을 때이므로 $\overline{\mathrm{AO_2}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AO_1}}-\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\boxed{r-2}$



$\overline{AO_2}$가 최소일 때, $\sin A=\frac{1}{r-2}$이므로 삼각형 CO_1O_2에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{O_1C}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$

$=5+4\sin A$

$=\boxed{5+\frac{4}{r-2}}$

이상에서 $f(r)=2r$, $g(r)=r-2$, $h(r)=5+\frac{4}{r-2}$이므로

$f(4)\times g(5)\times h(6)=8\times3\times6=144$

58) [정답] ⑤

[해설]

점 D는 $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$

이때 $\overline{PD}=\overline{BD}$이므로 $\overline{PD}:\overline{DC}=3:1$

따라서 $\overline{DC}=t\ (t>0)$, $\overline{PC}=s(s>0)$이라 하면

$\overline{PD}=3t$이므로 삼각형 CDP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle DPC)=\frac{(3t)^2+s^2-t^2}{2\times3t\times s}$

$=\frac{8t^2+s^2}{6ts}$

$=\frac{4t}{3s}+\frac{s}{6t}$

이때 $t>0$, $s>0$이므로

$\frac{4t}{3s}+\frac{s}{6t}\geq2\sqrt{\frac{4t}{3s}\times\frac{s}{6t}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(단, 등호는 $8t^2=s^2$일 때 성립한다.)

따라서 $\cos(\angle DPC)$의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

59) [정답] 147

[해설]

선분 OA를 2:3으로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{OC}=\frac{2}{5}\times\overline{OA}=\frac{2}{5}\times5=2$

$\angle CPO=\alpha$, $\angle OCP=\beta$라 하면 $\overline{OP}=5$이므로 삼각형 OCP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{5}{\sin\beta}$ $\quad\therefore\ \sin\alpha=\frac{2}{5}\sin\beta$

$\sin\beta$의 최댓값은 $\beta=\frac{\pi}{2}$일 때 1이다. 이때 $\sin\alpha$와 α의 값도 최대이고 직각삼각형 OCP에서

$\overline{CP}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

이므로 삼각형 OCP의 둘레의 길이는

$2+5+\sqrt{21}=7+\sqrt{21}$

$a=7$, $b=21$ $\quad\therefore\ ab=147$

[다른풀이]

$\overline{CP}=x$라 하면 삼각형 OCP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\alpha=\frac{x^2+5^2-2^2}{2\times x\times5}=\frac{x}{10}+\frac{21}{10x}$

두 양수 $\frac{x}{10}$, $\frac{21}{10x}$의 산술평균과 기하평균의 관계에서

$\frac{x}{10}+\frac{21}{10x}\geq2\sqrt{\frac{x}{10}\times\frac{21}{10x}}$

이므로 $\cos\alpha$의 값은 $\frac{x}{10}=\frac{21}{10x}$ ...... ㉠일 때 최소이다. $\cos\alpha$의 값이 최소일 때 α의 값이 최대이므로 ㉠에서

$x^2=21$ $\quad\therefore\ x=\sqrt{21}$

60) [정답] ③

[해설]

$\overline{AB}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{19})^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ$

$19=(x+y)^2-xy$

$\therefore\ xy=7^2-19=30$

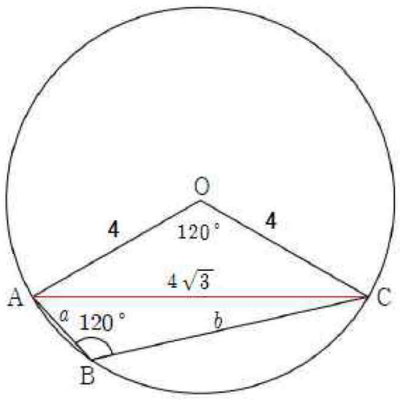
따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\times 30\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$$

61) [정답] ⑤

[해설]

$\angle ABC=120°$, $\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$이므로 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 $a+b=2\sqrt{15}$ …… ㉠



위의 그림안의 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}=8\times\sin 120^\circ=4\sqrt{3}$ …… ㉡

또 코사인법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ\\&=a^2+b^2+ab\\&=(a+b)^2-ab\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 대입하면

$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$ …… ㉢

사각형 OABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=(\triangle ABC\text{의 넓이})+(\triangle OAB\text{의 넓이})\\&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 120^\circ\\&=\frac{1}{2}(4\times 4+ab)\sin 120^\circ\\&=7\sqrt{3}\ (\because ㉢)\end{aligned}$$

62) [정답] $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

[해설]

$\overline{AB}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{19})^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$$
$$19=(x+y)^2-xy$$
$$\therefore xy=7^2-19=30$$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\times 30\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$$

63) [정답] ②

[해설]

$a_1=a$, 공차를 d라고 하면

$S_5=\frac{5\{a+(a+4d)\}}{2}=5(a+2d)=a$, $4a+10d=0$, $2a+5d=0$

$S_{10}=\frac{10\{a+(a+9d)\}}{2}=5(2a+9d)=40$, $2a+9d=8$

$d=2$, $-a=-5$, $\therefore a_{10}=a+9d=-5+18=13$

64) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 초항 $a_1=2$이므로

$a_n=2+(n-1)d$ …… ㉠

조건에서 $a_6=2(S_3-S_2)=2a_3$이므로

$2+5d=2(2+2d)$ ($\because$ ㉠)

즉, $2+5d=4+4d$이므로 $d=2$

등차수열의 합 $S_n=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$에서

$S_n=\frac{n(4+(n-1)\cdot 2)}{2}$이므로 $S_n=n(n+1)$

$\therefore S_{10}=10\times 11=110$

65) [정답] 7

[해설]

등차수열의 합 S_n이 $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 첫째항이 a이고 공차가 $d=2$를 대입하면

$S_n=n(a+n-1)$ …… ㉠

$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족하므로 ㉠에 $n=k$, $k+2$를 각각 대입하면

$k(a+k-1)=-16$ …… ㉡

$(k+2)(a+k+1)=-12$ …… ㉢

㉢−㉡에서 $2a+4k=2$ 즉, $a=1-2k$ …… ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $-k^2=-16$, $k^2=16$

$\therefore k=4(\because\ k>0)$

㉣에 대입하면 $a=-7$

따라서 일반항 $\{a_n\}$이 $a_n=a+(n-1)\cdot 2=2n+a-2$이고,

$a=-7, k=4$이므로

$a_{2k}=a_8=-7+7\times 2=7$

66) [정답] 35

[해설]

등차수열의 성질에 의해

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots$

를 만족하고, 조건 (나)에서 $a_l+a_m=1$을 만족하는 l, m의

순서쌍 (l, m)의 개수가 6이므로

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_6+a_{n-5}$

에서 $n-5=7$ 또는 $n-5=8$

$n-5=7$일 때는 조건 (가)와 모순이므로 $n-5=8$이다.

$\therefore a_1+a_{13}=a_6+a_8=1$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_6+a_7=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

㉠−㉡에서 $d=\dfrac{3}{2}$

$\therefore 2S=2\times\dfrac{14(a_1+a_{14})}{2}$

$=14(a_1+a_{13}+d)$

$=14\left(1+\dfrac{3}{2}\right)$

$=35$

67) [정답] ⑤

[해설]

$a_3+a_5=22$이므로 $a_4=11$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$a_4=a_1+3d$, $a_{k-3}=a_k-3d$이므로

$a_1+a_k=a_4+a_{k-3}=40$이다.

따라서 $S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=20k=k^2+100$이므로

$k^2+100=20k$에서

$k^2-20k+100=(k-10)^2=0$이다. $\therefore k=10$

68) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=38$이므로

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=38$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=142(n\geq 3)$이므로

$(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n=142$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3(a_1+a_n)=180$

$a_1+a_n=60$

조건 (나)에서 $S_n=390$이므로

$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=390$

$\dfrac{60n}{2}=390$, $30n=390$

따라서 $n=13$

69) [정답] ③

[해설]

(가)에서 등차수열의 합을 이용하면

$a+\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m+b=\dfrac{(a+b)(m+2)}{2}$

$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m+1=\dfrac{(m+2)}{2}$ $(\because a+b=1)$

$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m=\dfrac{m}{2}$ …… ㉠

(나)에서 $c_1\times\cdots\times c_m=32$ …… ㉡

㉡에서 $\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\log_2 32=5$

㉠에서 $\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\dfrac{m}{2}$

$\therefore \dfrac{m}{2}=5$ $\therefore m=10$

70) [정답] ②

[해설]

$f(x)=\log_4 x$조건에서

ㄱ. $f\left(\frac{x}{4}\right)=\log_4\frac{x}{4}=\log_4 x-\log_4 4=\log_1 x-1=f(x)-1$

∴ 거짓

ㄴ. $f(2^n)=\log_1 2^n=\log_{2^2}2^n=\frac{n}{2}\log_2 2=\frac{n}{2}$

∴ 공차 $\frac{1}{2}$, 첫째항 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다. ∴ 참

ㄷ. $f(f(x))$에서 $t=f(x)$로 치환하면 $t=\log_4 x>0(\because x>1)$

∴ $f(f(x))=f(t)=\log_4 t$는 $t>0$이므로 모든 실수값을 갖는다. ∴ 거짓

∴ 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

71) [정답] 10

[해설]

등차수열의 합에서

$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m=m\times\frac{a+b}{2}=\frac{m}{2}$

$\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\log_2 32=5=\frac{m}{2}$

∴ $m=10$

72) [정답] ③

[해설]

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times 2a_{\frac{11}{2}}=10a_{\frac{11}{2}}$

$T_{10}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_9+a_{10}=5d$

$\frac{S_{10}}{T_{10}}=6$에서 $10a_{\frac{11}{2}}=6\times 5d$이므로 $a_{\frac{11}{2}}=3d$

즉, $1+\frac{9}{2}d=3d$이므로 $d=-\frac{2}{3}$

$T_{37}=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{36}-a_{37}$

$=-a_1-18d$

$=-1-18\times\left(-\frac{2}{3}\right)=11$

73) [정답] ②

[해설]

공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{15}a_k=\frac{15(2a_1+14d)}{2}=165$

이므로 $a_1+7d=11$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{21}(-1)^k a_k=d+d+d+\cdots+d-a_{21}$

$=10d-a_{21}$

$=-a_1-10d=-20$

이므로 $a_1+10d=20$⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a_1=-10,\ d=3$

따라서 $a_{21}=-10+60=50$

74) [정답] 55

[해설]

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}$

$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}=500$

∴ $a_{10}+b_{10}=55$

75) [정답] 8

[해설]

$a_k=(2k+1)^2a_k-4k(k+1)a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2a_k-4\sum_{k=1}^{10}k(k+1)a_k$

$=100-4\times 23=8$

76) [정답] 20

[해설]

$\sum_{k=1}^{20}(2a_k+5b_k)=\sum_{k=1}^{20}\{2(a_k+2b_k)+b_k\}$

$=2\sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k)+\sum_{k=1}^{20}b_k=370$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{20}\left(a_k+2b_k+\frac{1}{4}b_k^2\right)$

$=\sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}b_k^2=185$ …… ㉡

$4\times$㉡ $-2\times$㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{20}b_k^2-2\sum_{k=1}^{20}b_k=0,\ \sum_{k=1}^{20}b_k^2-2\sum_{k=1}^{20}b_k+20=20$

$$\sum_{k=1}^{20}(b_k^2-2b_k+1)=20$$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}(1-b_k)^2=20$

77) [정답] 10

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times6+3\sum_{k=1}^{10}b_k=12+3\sum_{k=1}^{10}b_k$$

$12+3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$에서 $3\sum_{k=1}^{10}b_k=30$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}b_k=10$

78) [정답] 375

[해설]

$$\sum_{n=1}^{9}(n^2+2n)=\frac{1}{6}\cdot9\cdot10\cdot19+9\cdot10=375$$

79) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=n-\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$, $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}>\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$을 만족하는 n의 범위를 구하면

$$n-\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)>\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$$

$$n>\frac{1}{10}n\left(n+\frac{1}{3}\right)$$

n은 자연수이므로

$1>\frac{1}{10}\left(n+\frac{1}{3}\right)$, $n<10-\frac{1}{3}$

$$\therefore a_n=\begin{cases}\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right) & (1\le n\le9)\\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=n-\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right) & (n\ge10)\end{cases}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)+a_{10}$$

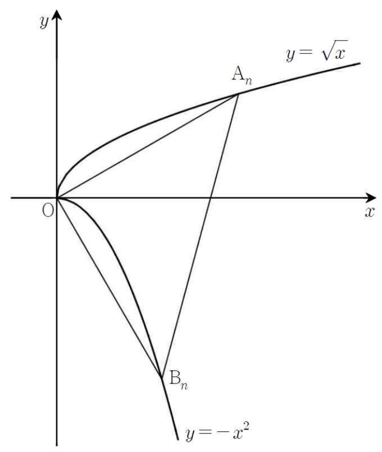
$$=\frac{1}{20}\times\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{1}{60}\times\frac{9\times10}{2}$$

$$+10-\frac{1}{20}\times10\left(10+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{119}{6}$$

80) [정답] 395

[해설]



위의 그래프에서 $\overline{\mathrm{OA_n}}$의 기울기는 $\frac{1}{n}$, $\overline{\mathrm{OB_n}}$의 기울기는 $-n$이므로 두 기울기는 수직이다.

또, $\overline{\mathrm{OA_n}}=\overline{\mathrm{OB_n}}$이므로 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}(n^2+n^4)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{10}(1+n^2)$$

$$=10+\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21$$

$$=395$$

81) [정답] 282

[해설]

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(n^2+cn)-(n-1)^2-c(n-1)$$

$$=2n-1+c$$

수열 $\{a_n\}$을 30번째항까지 나열하면

$$1+c,\ 3+c,\ 5+c,\ \cdots,\ 55+c,\ 57+c,\ 59+c$$

(ⅰ) $c=3k$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 $c\ne3k$꼴이므로 성립하지 않는다.

(ⅱ) $c=3k+1$인 경우

$b_{20}=57+c$이므로 $57+c=199$

$$c=142$$

따라서 성립한다.

(iii) $c=3k+2$인 경우

$b_{20}=59+c$이므로 $59+c=199$

따라서 $c=140$이므로 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $b_{20}=199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합은 $142+140=282$

82) [정답] ①

[해설]

$1 \le n \le 15$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16 \le n \le 30$을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1 \le n \le 15k$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1, 2, 3, \cdots$)

a_{16}은 $16 \le n \le 30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} 3n - \sum_{n=1}^{6} 5n + \sum_{n=1}^{2} 15n$

$=240$

[다른 풀이]

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$이고

$k(k=1, 2, 3, \cdots, 14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$

$\sum_{n=1}^{8} a_n = 1+2+4+7+8+11+13+14=60$

$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=9}^{16} a_n = 2\sum_{n=1}^{8} a_n + 15\times 8 = 2\times 60+120$

$=240$

83) [정답] ①

[해설]

주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면

1, 2, ❸, 4, 5, ❻, ⋯, 44, ㊺

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{45} k - \sum_{k=1}^{15} 3k = \frac{45\times 46}{2} - 3\times\frac{15\times 16}{2} = 675$$

84) [정답] ③

[해설]

a_n과 S_n을 나열하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
a_n	4	−2	0	2	4	−2	0	2	4	−2	0	2	⋯
S_n	4	2	2	4	8	6	6	8	12	10	10	12	⋯

따라서 구하는 m의 최솟값은 9이다.

85) [정답] 60

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) $a_1=k$ (k는 자연수)인 경우

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=k$, $a_2=k-1$, $a_3=k-2$, $\cdots$, $a_{k-1}=2$,

$a_k=1$, $a_{k+1}=0$, $a_{k+2}=-1$, $a_{k+3}=1$, $a_{k+4}=0$,

$a_{k+5}=-1$, $\cdots$

이므로 $n \ge k$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+3}=a_n$이므로 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅱ) $a_1=k+\alpha$ (k는 0또는 정수, $0<\alpha<1$)인 경우

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=k+\alpha$, $a_2=(k-1)+\alpha$, $a_3=(k-2)\alpha$, $\cdots$, $a_{k-1}=2+\alpha$

$a_k=1+\alpha$, $a_{k+1}=\alpha$, $a_{k+2}=\alpha-1$, $a_{k+3}=1-\alpha$, $a_{k+4}=-\alpha$

$a_{k+5}=\alpha$, $a_{k+6}=\alpha-1$, $a_{k+7}=1-\alpha$, $a_{k+8}=-\alpha$, $\cdots$

이므로 $n \ge k+1$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n$이다.

이때 $n \ge 11$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=a_{n+2}$이려면 $k=10$이어야 하고,

$a_k=a_{k+2}$, $a_{k+1}=a_{k+3}$이어야 한다.

즉, $\alpha=\dfrac{1}{2}$이고 $a_1=k+\alpha=10+\dfrac{1}{2}=\dfrac{21}{2}$, $n\ge 11$인

모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

따라서

$$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=11}^{20}a_n$$

$$=\left(\frac{21}{2}+\frac{19}{2}+\cdots+\frac{3}{2}\right)+(0+0+0+0+0)$$

$$=\frac{10\times\left(\frac{21}{2}+\frac{3}{2}\right)}{2}=60$$

86) [정답] 5

[해설]

(ⅰ) $a_1=1$일 때

$a_1\ge 0$이므로 $a_2=a_1-2=-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=a_2+5=4$

$a_3\ge 0$이므로 $a_4=a_3-2=2$

$a_4\ge 0$이므로 $a_5=a_4-2=0$

$a_5\ge 0$이므로 $a_6=a_5-2=-2$

$a_6<0$이므로 $a_7=a_6+5=3$

$a_7\ge 0$이므로 $a_8=a_7-2=1=a_1$

$a_8\ge 0$이므로 $a_9=a_8-2=-1=a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+7}=a_n$을 만족시키고 $a_{15}=a_8=a_1=1$

(ⅱ) $a_1=2$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=2$

(ⅲ) $a_1=3$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=3$

(ⅳ) $a_1=4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=4$

(ⅴ) $a_1=5$일 때

$a_1\ge 0$이므로 $a_2=a_1-2=3$

$a_2\ge 0$이므로 $a_3=a_2-2=1$

$a_3\ge 0$이므로 $a_4=a_3-2=-1$

$a_4<0$이므로 $a_5=a_4+5=4$

$a_5\ge 0$이므로 $a_6=a_5-2=2$

$a_6\ge 0$이므로 $a_7=a_6-2=-2$

$a_7\ge 0$이므로 $a_8=a_7-2=-2$

$a_8<0$이므로 $a_9=a_8+5=3=a_2$

$a_9\ge 0$이므로 $a_{10}=a_9-2=1=a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=-2<0$

따라서 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

87) [정답] ②

[해설]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$이므로

$n=1$일 때, $a_1+a_2=2a_1$

$n=2$일 때, $a_3+a_4=2a_2$

⋮

$n=n-1$일 때, $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$

변변히 모두 더하면 $S_{2n}=2S_n$

그런데 조건에서 $a_1=\dfrac{3}{2}$이므로

$S_2=2S_1=3$

따라서 $S_4=2S_2=6$, $S_8=2S_4=12$

$\therefore S_{16}=2S_8=24$

88) [정답] ①

[해설]

(가), (나)에서

$a_{2n+1}=-a_n+3a_{n+1}$ …… ㉠

$a_{2n+2}=a_n-a_{n+1}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$

$n=1$일 때, $a_3+a_4=2a_2$

$n=2$일 때, $a_5+a_6=2a_3$

$\vdots$

$n=n-1$일 때, $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$

변변히 모두 더하면

$S_{2n}-a_1-a_2=2(S_n-a_1)$

즉, $S_{2n}=2S_n+1$

그런데 조건에서 $a_1=1$, $a_2=2$이므로

$S_2=1+2=3$

따라서 $S_4=2S_2+1=7$, $S_8=2S_4+1=15$

$\therefore S_{16}=2S_8+1=31$

89) [정답] ①

[해설]

$$\begin{cases} a_2=a_1a_3+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ a_3=2a_1-2a_2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_2=a_1(2a_1-a_2)+1$

$$\therefore\ a_2=\frac{2a_1{}^2+1}{a_1+1}=2(a_1-1)+\frac{3}{a_1+1}$$

이때 a_1+1이 3의 약수가 되어야 하므로

$\therefore\ a_1+1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$

따라서 a_1의 최솟값 m은 $m=-4$

따라서 $a_2=-11$, $a_3=3$이므로

$$\begin{aligned} a_9&=2a_4-a_2 \\ &=2(a_2a_3+1)-a_2 \\ &=2\{(-11)\times 3+1\}+11 \\ &=-53 \end{aligned}$$

90) [정답] 64

[해설]

$a_7=3a_3=3\times 3a_1=9$이므로 $a_k=64$

$a_{2n}=2a_n$에서

$a_2=2a_1=2$

$a_4=2a_2=2^2$

$a_8=2a_4=2^3$

$\vdots$

따라서 $a_{2^n}=2^n$이므로 $a_k=64=2^6$에서

$k=2^6=64$

91) [정답] ④

[해설]

주어진 관계식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$를 차례로 대입하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	20	11	5	2	2	2	2	2	2	2

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=20+11+5+2\times 7=50$$

92) [정답] **17**

[해설]

조건에 맞도록 나열하면

(가)에서 $a_{m-2}=d+1$, $a_{m-1}=1$, $a_m=1-d$

$1-d$	1	$1+d$	$\cdots$
a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	$\cdots$
	a_{m+1}		

(나)에서 $a_1=a_{m-1}+(m-2)d=1+(m-2)d$

$2+(m-2)d=9(d-2)$, $d=\dfrac{20}{11-m}$

(다)에서 $(m-1)\dfrac{9(d-2)}{2}=45$, 즉 $(m-1)(d-2)=10$

따라서 $(m-1)\left(\dfrac{20}{11-m}-2\right)=10$, $m^2+3m-54=0$

$(m-6)(m+9)=0$, $\therefore m=6$, $d=4$

$\therefore a_1=1+(6-2)\times 4=17$

93) [정답] ②

[해설]

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$, (우변)$=\dfrac{2!}{2^1}=1$이므로

$(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\le\frac{(2m)!}{2^m}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_\mathrm{k}}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2}\mathrm{P}_\mathrm{k}}{2^k}+\frac{{}_{2\mathrm{m}+2}\mathrm{P}_{\mathrm{m}+1}}{2^{\mathrm{m}+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}+\frac{(2\mathrm{m}+2)!}{2^{\mathrm{m}+1}\times(\mathrm{m}+1)!}$$

$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$=\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{(2m+1)(m+1)}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$

$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$p=1,\ f(m)=(2m+2)!,\ g(m)=(2m+1)(m+1)$

$$\therefore p+\frac{f(2)}{g(1)}=1+\frac{6!}{9\times5}=1+16=17$$

94) [정답] ②

[해설]

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!+(k+1)!}{(k+2)\times(k+1)!}$$

$$=\left(\frac{1}{k+2}\right)a_k+\frac{1}{k+2}$$

$$=\left(\frac{1}{k+2}\right)a_k+\frac{1}{k+2}$$

$$=\boxed{\frac{1}{k+2}}(1+a_k)$$

$$<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\boxed{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$$

95) [정답] ②

[해설]

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!+(k+1)!}{(k+2)\times(k+1)!}$$

$$=\left(\frac{1}{k+2}\right)a_k+\frac{1}{k+2}$$

$$=\left(\frac{1}{k+2}\right)a_k+\frac{1}{k+2}$$

$$=\boxed{\frac{1}{k+2}}(1+a_k)$$

$$<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\boxed{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$$